Commentaires : Le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^p$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^p$ qui n'appartiennent pas à F. Il est noté $\mathbb{R}^p \setminus F$ ou ${}^cF$
▹ L'ensemble vide étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$. De même $\mathbb{R}^p$ étant un ouvert, l'ensemble vide est un fermé de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 14.2 — Toute boule fermée de $\mathbb{R}^p$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$.

◆ Partie bornée

Définition : *Une partie K de $\mathbb{R}^p$ est bornée s'il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, on ait : $\|x\| \leqslant r$.*

■ Intérieur, extérieur, frontière, adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^p$

On désigne par Ω une partie non vide de $\mathbb{R}^p$.

◆ Point intérieur, point extérieur

Définition : *Un point x de $\mathbb{R}^p$ est un **point intérieur** à Ω s'il existe une boule ouverte de centre x, de rayon $r > 0$, contenue dans Ω.*

Commentaire : L'ensemble des points intérieurs à Ω s'appelle l'intérieur de Ω, on le note $\mathring{\Omega}$. Il s'agit d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Définition : *Un point x de $\mathbb{R}^p$ est un **point extérieur** à Ω s'il existe une boule ouverte de centre x, de rayon $r > 0$, contenue dans le complémentaire de Ω.*

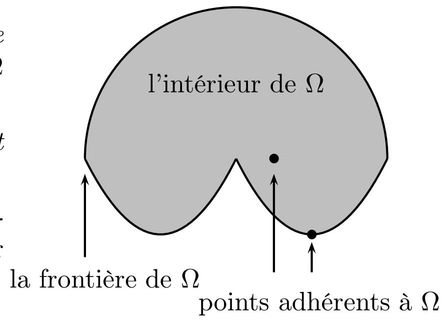
Commentaire : L'ensemble des points extérieurs à Ω s'appelle l'extérieur de Ω, on le note $\mathrm{Ext}(\Omega)$. Il s'agit de l'intérieur du complémentaire de Ω.

◆ Point de la frontière, point adhérent

Définition : *Un point x est un **point de la frontière** de Ω si toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois Ω et son complémentaire.*

Définition : *Un point x est **adhérent** à Ω si tout ouvert contenant x rencontre Ω.*

Commentaire : L'ensemble des points adhérents à Ω s'appelle l'***adhérence*** de Ω, on la note $\overline{\Omega}$. On peut montrer qu'il s'agit d'une partie fermée de $\mathbb{R}^p$ contenant Ω.



■ Limite et continuité

Soit Ω une partie non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur Ω.

◆ Limite en un point adhérent

Définition : *Soit a un point adhérent à Ω. On dit que f admet une **limite en** a lorsqu'il existe un réel ℓ vérifiant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \big(x \in \Omega \ \textit{et}\ \|x - a\| \leqslant \alpha\big) \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$