Chapitre 14

Physique quantique

Exercice 1 **Diffraction et interférences d'un faisceau moléculaire**

1. Il y a diffraction du faisceau par la pupille, c'est une preuve du caractère ondulatoire des molécules.
2. La fonction d'onde complexe ψ de la physique quantique joue le rôle de la fonction d'onde complexe $\underline{a}$ de l'optique physique dans le modèle scalaire de la lumière. Les phénomènes d'interférence quantique sont analogues aux phénomènes d'interférence lumineuse. La fonction ddensité de probabilité ρ est analogue à l'intensité lumineuse I ; les franges brillantes sur un écran en optique correspondent aux zones de forte probabilité de présence des particules et où on enregistrera de nombreux impacts sur un écran. Sur la figure 2, on a l'équivalent de franges des trous d'Young.
3. On mesure sur la figure 2 une interfrange $i = 35\ \mu$m. Par application de la formule des trous d'Young :
$$i = \frac{\lambda D}{a} \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{ia}{D} = 2,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$
Par application de la relation impulsion - longueur d'onde :
$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{soit} \quad mv = \frac{h}{\lambda} \quad \text{donc} \quad m = \frac{h}{\lambda v} = 1,18 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$$
La masse d'une particule C_{60} est
$$m = \frac{60 \times 12 \cdot 10^{-3}}{\cdot \mathcal{N}_A} = 1,20 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$$
Le résultat est donc compatible avec l'hypothèse d'un faisceau de fullerène.

Exercice 2 **Normalisation d'un paquet d'ondes**

1. La relation de dispersion s'écrit

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2 \quad \text{donc} \quad \omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}$$

La vitesse de groupe s'obtient en dérivant la relation de dispersion :

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar}{m}k \quad \text{donc} \quad v_g = \frac{\hbar k_0}{m}$$

2. La fonction $\alpha(k)$ est égale à la constante α_0 dans l'intervalle $\left[k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right]$, nulle partout ailleurs. Exprimons l'intégrale, limitée à cet intervalle, en remplaçant k et x par les expressions fournies par l'énoncé :

$$\psi(x,t) = \int_{k=k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} \alpha_0 e^{-j(\omega_0 t + v_g k t - v_g k_0 t - kX - k v_g t)} dk = \alpha_0 \int_{k=k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} e^{-j(\omega_0 t - v_g k_0 t - kX)} dk$$

Effectuons le changement de variable d'intégration proposé par l'énoncé $K = k - k_0$ donc $k = K + k_0$ et $dk = dK$:

$$\psi(x,t) = \alpha_0 \int_{K=-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{-j(\omega_0 t - v_g k_0 t - KX - k_0 X)} dK = \alpha_0 e^{-j((\omega_0 - v_g k_0)t - k_0 X)} \int_{K=-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{jKX} dK$$

On retrouve donc bien la formule donnée par l'énoncé avec $\beta = (\omega_0 t - v_g k_0)t - k_0 X$.

3. Le calcul de l'intégrale est simple :

$$I = \int_{K=-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{jKX} dK = \left[\frac{1}{jK} e^{jKX}\right]_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}}$$

$$\text{soit} \quad I = \frac{e^{jX\frac{\Delta k}{2}} - e^{-jX\frac{\Delta k}{2}}}{jX} = \frac{2j \sin\frac{X\Delta k}{2}}{2j\frac{X\Delta k}{2}} \cdot \Delta k$$

$$\text{soit} \quad I = \Delta k \cdot \operatorname{sinc} \frac{X\Delta k}{2} \quad \text{donc} \quad \psi(x,t) = \alpha_0 e^{-j\beta} \Delta k \operatorname{sinc} \frac{X\Delta k}{2}$$

qui est bien la forme attendue. La densité linéïque de probabilité est, par définition :

$$\rho(x) = \psi(x,t) \cdot \psi^*(x,t) = \alpha_0^2 \Delta k^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{X\Delta k}{2}$$

4. Le pic de probabilité correspond au maximum de $\rho(x,t)$, et est donc atteint, à la date t, lorsque $X = 0$ (maximum de la fonction sinus cardinal carré), soit

$$x - v_g t = 0 \quad \text{soit} \quad x = v_g t$$

v_g est donc la vitesse de déplacement du maximum de la fonction ρ, c'est donc celle de déplacement du paquet d'onde, ce qui est bien la définition de la vitesse de groupe.

5. Les bords de l'enveloppe délimitant le paquet d'ondes sont obtenus pour

$$\frac{X\Delta k}{2} = \pm\pi \quad \text{soit} \quad X = \pm\frac{2\pi}{\Delta k}$$

La largeur du paquet est donc

$$\Delta X = \frac{2\pi}{\Delta k} - \left(-\frac{2\pi}{\Delta k}\right) = \frac{4\pi}{\Delta k} \quad \text{donc} \quad \Delta X \cdot \Delta k = 4\pi$$

Or $\Delta = \frac{\Delta p}{\hbar}$ donc

$$\Delta X \cdot \frac{\Delta p}{\hbar} = 4\pi \quad \text{soit} \quad \Delta X \cdot \Delta p = 2h$$

qui est conforme à l'inégalité d'Heisenberg spatiale (on rappelle que h n'est que l'ordre de grandeur du produit, et le coefficient 2 n'est donc pas gênant.

6. La condition de normalisation s'écrit

$$\int_{X=-\infty}^{+\infty} \psi(X,t)dX = 1 \quad \text{soit} \quad \int_{X=-\infty}^{+\infty} \alpha_0^2 \Delta k^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{X\Delta k}{2} dX = 1$$

Effectuons le changement de variable $u = \frac{X\Delta k}{2}$ soit $X = \frac{2u}{\Delta k}$ et $dX = \frac{2}{\Delta k}du$. La condition de normalisation s'écrit donc

$$\alpha_0^2 \Delta k^2 \int_{X=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 u \cdot \frac{2}{\Delta k} du = 1$$

et en utilisant le résultat donné par l'énoncé :

$$\alpha_0^2 \Delta k^2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{\Delta k} = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta k}}$$

Exercice 3 $\boxed{\textbf{Équation de conservation particulaire}}$

1. D'après le cours :

$$(E)\ :\ j\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x,t)$$

2. Les deux termes de la combinaison linéaire s'écrivent :

$$[\psi^*\cdot E]\ :\ \psi^*\left[j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]=-\psi^*\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi\psi^*$$

$$[\psi\cdot E^*]\ :\ \psi\left[-j\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right]=-\psi\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+V(x)\psi\psi^*$$

La soustraction des deux relations donne

$$(E')\ :\ j\hbar\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right]=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right]$$

3. Calculons la dérivée temporelle de ρ et la dérivée spatiale de J.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\psi\psi^*}{\partial t}=\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x}=-\frac{j\hbar}{2m}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right]=-\frac{j\hbar}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right]$$

L'équation (E') s'écrit donc :

$$j\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}=-j\hbar\frac{\partial J}{\partial x}\quad\text{soit}\quad\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

qui est bien l'équation de conservation particulaire du cours.

4. Pour la fonction d'onde $\psi(x,t)=\psi_0e^{-j(\omega t-kx)}$:

$$J(x,t)=\frac{-j\hbar}{2m}\left[\psi_0^*e^{j(\omega t-kx)}\cdot jk\psi_0e^{-j(\omega t-kx)}-\psi_0e^{-j(\omega t-kx)}\cdot(-jk)\psi_0^*e^{j(\omega t-kx)}\right]=|\psi_0|^2\frac{\hbar k}{m}$$

qui est bien l'expression de J donnée dans le cours pour la particule libre.

Exercice 4 $\boxed{\textbf{Application numérique}}$
Exprimons les deux termes :

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m\left(E-\frac{E}{2}\right)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{mE}{\hbar^2}}$$

donc $k_1 = k_2\sqrt{2}$. En appliquant les formules du cours :

$$R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{(k_2\sqrt{2}-k_2)^2}{(k_2\sqrt{2}+k_2)^2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \simeq 0,029$$

$$T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4k_2^2\sqrt{2}}{(k_2\sqrt{2}+k_2)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \simeq 0,971$$

Par définition du coefficient de transmission, la probabilité de transmission d'une particule est de 0,971. Statistiquement, sur 1000 particules incidentes, 971 sont transmises.

Exercice 5 **Couche protectrice**

1. $\delta_2 = \frac{1}{k_2}$ est la distance caractéristique de pénétration, aussi appelée épaisseur de peau.
2. Considérons les deux cas.
   – Barrière très haute : $V_0 \to +\infty$ donc $k_2 \to +\infty$ et $\text{sh}(k_2 a) \to +\infty$. L'équivalent de T est :
   $$T \simeq \frac{4k_1^2 k_2^2}{k_2^4 \text{sh}^2(k_2 a)} = \frac{4k_1^2}{k_2^2 \text{sh}^2(k_2 a)} \to 0$$
   – Barrière très large : $a \to +\infty$ donc $\text{sh}(k_2 a) \to +\infty$. L'équivalent de T est :
   $$T \simeq \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 \text{sh}^2(k_2 a)} \to 0$$
   Dans les deux cas, le coefficient de transmission tend vers zéro et la barrière est pratiquement infranchissable.
3. Si $a \gg \frac{1}{k_2}$, alors $ak_2 \gg 1$ et le sinus hyperbolique a pour équivalent
   $$\text{sh}(k_2 a) = \frac{e^{k_2 a} - e^{-k_2 a}}{2} \simeq \frac{e^{k_2 a}}{2}$$
   Comparons les ordres de grandeur des deux termes du dénominateur en estimant leur rapport : comme E est du même ordre de grandeur que V_0, k_1 et k_2 sont du même ordre de grandeur ($k_1 \simeq k_2 \simeq k$) et
   $$\frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 \text{sh}^2(k_2 a)} \simeq \frac{4k^4}{(2k^2)^2 \text{sh}^2(k_2 a)} \simeq \frac{1}{e^{2k_2 a}} \ll 1$$
   On en déduit l'équivalent :
   $$T \simeq \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 \frac{e^{2k_2 a}}{4}} = \frac{16 k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} e^{-2k_2 a}$$
   qui est bien la forme attendue avec $T_0 = \frac{16 k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2}$.
4. Le cahier des charges est
   $$T_0 e^{-2ka} = 10^{-6} \quad \text{donc} \quad -2k_2 a = \ln \frac{10^{-6}}{T_0} \quad \text{soit} \quad a = \frac{1}{2k_2} ln(10^6 T_0)$$
   $$\text{soit} \quad a = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0 - E)}} ln(10^6 T_0)$$

Exercice 6 $\boxed{\textbf{Microscope à effet tunnel}}$

1. D'après le cours, la barrière est constituée si $eU_0 > E$, soit $V_0 > E$.
2. L'exponentielle varie de 0 à 1 lorsque son argument $\frac{2a}{\delta}$ varie de 0 à 5 environ. Pour pouvoir distinguer les variations de a, il faut que la dérivée de l'exponentielle reste significativement non nulle, ce qui est le cas quand $\frac{2a}{\delta}$ reste de l'ordre de 1 donc si $a \simeq \frac{1}{\delta}$.
3. Un courant électrique est détecté si certains électrons parviennent à franchir la barrière de potentiel énergétique. Cette possibilité, interdite en physique classique, est possible en physique quantique : c'est l'effet tunnel.
4. La mesure du courant donne accès à la probabilité de traversée de la barrière de potentiel par les électrons :
$$i = \frac{dq}{dt} = e\frac{dN}{dt} = \beta \cdot T = \beta T_0 e^{-\frac{2a}{\delta}}$$
La connaissance de T donne accès à a d'après l'expression exponentielle. Si on note d la distance de la base de la plaque à la pointe, l'altitude de la cellule est donc $z = d - a$. La connaissance de z pour chaque cellule donne accès au relief de la plaque.
5. Le rapport des intensités est égal au rapport des coefficients de transmission :
$$T_2 = T_1 + \frac{19}{100}T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = 1,19 \Leftrightarrow \frac{T_0 e^{-\frac{2a_1}{\delta}}}{T_0 e^{-\frac{2a_2}{\delta}}} = 1,19$$
$$\text{soit} \quad e^{\frac{2}{\delta}(a_2 - a_1)} = 1,19$$
$$\text{donc} \quad a_2 - a_1 = \frac{\delta}{2}\ln 1,19 = 0,87 \text{ nm}$$

Exercice 7 $\boxed{\textbf{Normalisation de la particule confinée 1D}}$

1. Par définition de la fonction d'onde stationnaire :

$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{-j\omega t}\phi(x) = 2jA\sin(kx)e^{-j\omega t}$$

2. La densité linéique de probabilité est égale au carré de la fonction d'onde est

$$\rho(x) = \psi(x,t)\cdot\psi^*(x,t) = 4|A|^2\sin^2(kx)$$

La condition de normalisation s'écrit

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty}\rho(x)dx = 1 \quad \text{soit} \quad \int_{x=0}^{a} 4|A|^2\sin^2(kx) = 1$$

On linéarise le sinus carré : $\sin^2(kx) = \frac{1-\cos(2kx)}{2}$ donc

$$2|A|^2\int_{x=0}^{a}(1-\cos(2kx))dx = 2|A|^2\left[x - \frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^a = 2|A|^2\left[a - \frac{\sin(2ka)}{2k}\right]$$

Or la relation de quantification pour le puits de potentiel infini de largeur a s'écrit $k = n\frac{\pi}{a}$ où n est un entier naturel non nul, donc

$$\sin(2ka) = \sin(2n\pi) = 0$$

La condition de normalisation s'écrit donc

$$2|A|^2 a = 1 \quad \text{soit} \quad |A| = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

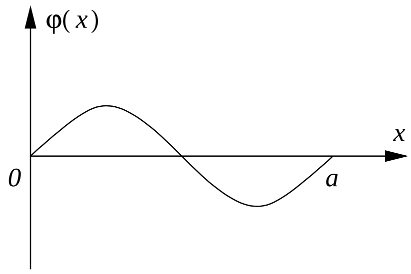
En prenant $A = -j\alpha$:

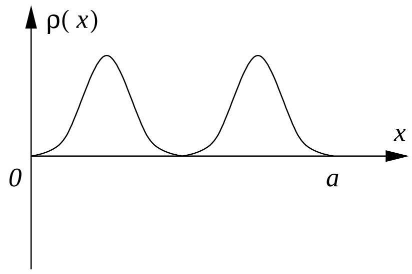
$$\alpha = |A| = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

3. En remplaçant A par son expression, on a donc

$$\phi(x) = 2\alpha\sin(kx) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a} \quad \text{et} \quad \rho(x) = \frac{2}{a}\sin^2\frac{2\pi x}{a}$$

Voici l'allure des deux graphes :





Exercice 8 **Puits semi-infini**

1. Pour $x < 0$, le potentiel est infini donc la probabilité de présence est nulle. Les formes proposées sont celles données dans le cours dans le cas $x \in [0, a]$ où l'énergie est positive et le potentiel nul, et pour $x > a$ où l'énergie E est inférieure au potentiel V_0.
2. φ ne peut pas diverger pour $x \to +\infty$, donc nécessairement $B_2 = 0$.
3. Les conditions de continuité donnent :
   – en $x = 0$, il y a une discontinuité infinie du potentiel donc il y a continuité de φ :
   $$\varphi(0^+) = 0$$
   – en $x = a$, il y a discontinuité finie du potentiel donc il y a continuité de φ et de sa dérivée :
   $$\varphi(a^-) = \varphi(a^+) \quad \text{et} \quad \varphi'(a^-) = \varphi'(a^+)$$
   Les trois équations sont donc :
   $$\left\{\begin{array}{l} A_1 + B_1 = 0 \\ A_1 e^{jka} + B_1 e^{-jka} = A_2 e^{-\frac{a}{\delta}} \\ jkA_1 e^{jka} - jkB_1 e^{-jka} = -\frac{A_2}{\delta} e^{-\frac{a}{\delta}} \end{array}\right.$$
4. Le système s'écrit
   $$B_1 = -A_1 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} 2jA_1 \sin(ka) = A_2 e^{-\frac{a}{\delta}} \\ 2jkA_1 \cos(ka) = -\frac{A_2}{\delta} e^{-\frac{a}{\delta}} \end{array}\right.$$
   En divisant ces deux égalités, on en déduit que
   $$\tan(ka) = -k\delta = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$
   Conservons línformation $\tan(ka) < 0$ et élevons au carré :
   $$\tan(ka) = \frac{E}{V_0 - E} \quad \text{soit} \quad (V_0 - E)\sin(ka) = E\cos(ka) = E - E\sin(ka)$$
   $$\text{soit} \quad \sin(ka) = \frac{E}{V_0} \quad \text{donc} \quad |\sin(ka)| = \sqrt{\frac{E}{V_0}} = \frac{k}{k_0}$$
5. Posons $x = ka$: l'équation s'écrit alors
   $$|\sin x| = \frac{x}{k_0 a} \quad \text{soit} \quad |\sin x| = \frac{x}{\beta} \quad \text{avec} \quad \beta = k_0 a$$
   avec $\tan(x) < 0$ donc $x \in \left]\frac{\pi}{2} + p\pi, \pi + p\pi\right]$, p entier. En utilisant les graphes proposés par l'énoncé, on constate que
   – si $\beta < \frac{\pi}{2}$ soit $k_0 < \frac{\pi}{2a}$, la seule solution de l'équation est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc sa tangente est positive et on la rejette ; le problème n'a donc pas de solution stationnaire ;
   – si $\beta > \frac{\pi}{2}$ soit $k_0 > \frac{\pi}{2a}$, il y a un nombre fini de solutions ; en particulier pour $\beta = 5\pi$, soit $k_0 = \frac{5\pi}{a}$, le graphe donné par l'énoncé prouve quíl y a 5 solutions de tangentes négatives, et que les premières sont proches de $x = \pi$ ($k = \frac{\pi}{a}$), $x = 2\pi$ ($k = \frac{2\pi}{a}$), $x = 3\pi$ ($k = \frac{3\pi}{a}$) ; il y a donc un nombre fini de solutions stationnaires et le problème est quantifié ;
   – pour $\beta >\gg \frac{\pi}{2}$ soit $k_0 \gg \frac{\pi}{2a}$, la droite est presque confondue avec l'axe des abscisses, il y a donc un très grand nombre de solutions qui sont proches de $x = n\pi$ soit $k = \frac{n\pi}{a}$, n entier naturel non nul, qui est bien la relation de quantification pour le puits de potentiel infini.

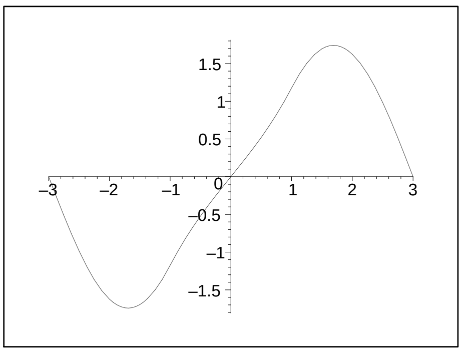
Exercice 9 **Système à double puits, oscillations quantiques**

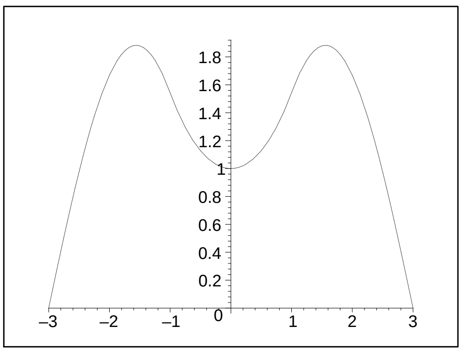
Préliminaire. L'énergie potentielle élastique est $Ep = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$. La longueur de chacun des reessorts, par application du théorème de Pythagore, est $\ell = \sqrt{x^2 + b^2}$ donc

$$V(x) = 2 \times \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+b^2} - \ell_0\right)^2$$

Le graphe est bien celui de cette fonction.

1. L'énergie est inférieure à V_0, le franchissement de la barrière de potentiel est possible par effet tunnel.
2. Le potentiel est symétrique par rapport à $x = 0$; la densité linéïque de probabilité de présence est donc elle-aussi symétrique par rapport à $x = 0$, donc ρ est une fonction paire de x :
$$\rho(-x) = \rho(x) \quad \text{soit} \quad \varphi^2(-x) = \varphi^2(x)$$
$$\text{soit} \quad [\varphi(-x) - \varphi(x)] \cdot [\varphi(-x) + \varphi(x)] = 0 \quad \text{donc} \quad \varphi(-x) = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad \varphi(-x) = -\varphi(x)$$
φ est donc paire ou impaire.
3. Il y a a priori 6 relations de continuité :
– continuité de φ en $x = -3a$ (discontinuité infinie de potentiel)
– continuité de φ et de φ' en $x = -a$ (discontinuité finie de potentiel)
– continuité de φ et de φ' en $x = a$ (discontinuité finie de potentiel)
– continuité de φ en $x = 3a$ (discontinuité infinie de potentiel).
On vérifie sur les solutions proposées que
$$\varphi_i(-3a) = \varphi_i(3a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_p(-3a) = \varphi_p(3a) = 0$$
Les relations de continuité en $x = -a$ et en $x = +a$ donnent les mêmes relations ; il suffit donc de les écrire en $x = a$:
$$\begin{cases} I_0 \mathrm{sh}\frac{a}{\delta_i} = I\sin(2k_i a) \\ I_0 \mathrm{ch}\frac{a}{\delta_i} = -k_i I\cos(2k_i a) \end{cases} \qquad \begin{cases} P_0 \mathrm{ch}\frac{a}{\delta_p} = P\sin(2k_p a) \\ P_0 \mathrm{sh}\frac{a}{\delta_p} = -k_p P\cos(2k_p a) \end{cases}$$
En faisant le rapport entre les égalités, on élimine les constantes :
$$\delta_i \mathrm{th}\frac{a}{\delta_i} = -\frac{1}{k_i}\tan(2k_i a) \quad \text{et} \quad \delta_p \mathrm{coth}\frac{a}{\delta_p} = -\frac{1}{k_p}\tan(2k_p a)$$
Ce sont bien les deux relations demandées par l'énoncé.
4. En remplaçant δ_i et k_i, on obtient une équation en E_i, et de même pour E_p.
5. La condition $ka = \frac{\pi}{2}$ donne
$$k^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} \quad \text{soit} \quad \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{4a^2} \quad \text{soit} \quad E = E_1 \quad \text{avec} \quad E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$$
C'est l'énergie minimale (voir section 14.3) de la particule dans un puits de potentiel infini de largeur $2a$; en effet, $E \ll V_0$ et la situation est proche de celle où $x \in [-3a, a]$ et $x \in [a, 3a]$ forment deux puits de potentiel infini de même largeur $2a$.
6. Les deux fonctions sont continues et de dérivée continue en $x = \pm a$, nulles en $x = \pm 3a$, φ_i est impaire et φ_p paire. Voici l'allure des courbes :





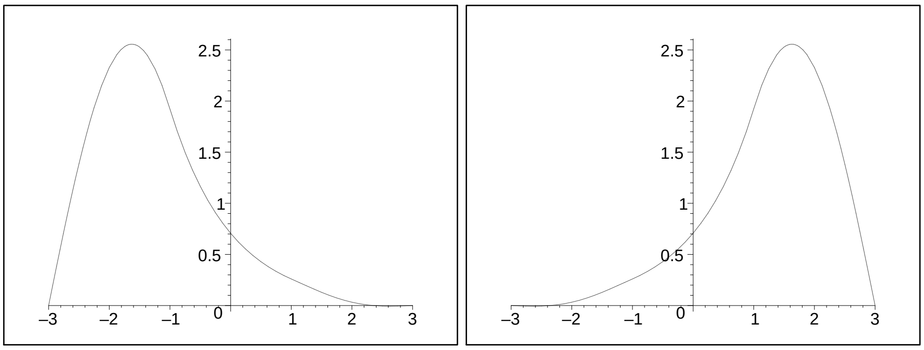
7. Si $E_i \simeq E_p$, les fonctions d'onde

$$\psi_p(x,t) = \varphi_p(x) e^{-j\frac{E_p}{\hbar}t} \quad \text{et} \quad \psi_i(x,t) = \varphi_i(x) e^{-j\frac{E_i}{\hbar}t}$$

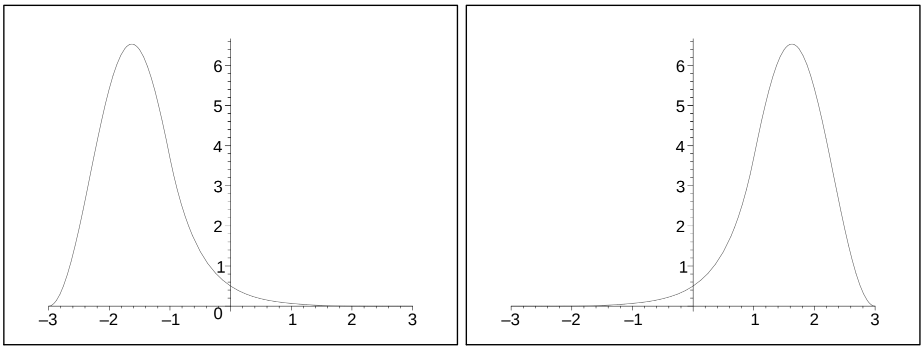
ont même pulsation $\omega = \omega_i = \omega_p \simeq \frac{E_0}{\hbar}$. Les superpositions sont donc stationnaires

$$\psi_{G,D}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_p(x) e^{-j\frac{E_p}{\hbar}t} \mp \varphi_i(x) e^{-j\frac{E_i}{\hbar}t}\right] \simeq \left[\varphi_p(x) \pm \varphi_i(x)\right] e^{-j\frac{E_0}{\hbar}t}$$

Les allures des fonctions spatiales $\varphi_G(x)$ et $\varphi_D(x)$



et celles des densités associées $\rho_G(x) = \varphi_G^2(x)$ et $\rho_D(x) = \varphi_D^2(x)$



font apparaître respectivement un lobe de probabilité importante à gauche (G) ou à droite (D). Le coefficient $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un coefficient de normalisation.

8. Le calcul est le même que celui du cours : il y a oscillation quantique entre les deux états (G) et (D), donc oscillation de retournement à la pulsation :

$$\omega_{G,D} = \frac{\delta E}{\hbar}$$