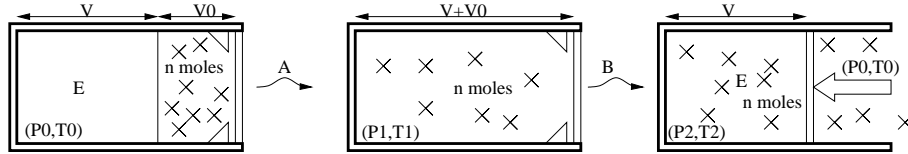


Chapitre 11

Thermodynamique quantitative

Exercice 1 **Transformations du gaz parfait**

- On a un gaz parfait monoatomique donc $C_{Vm} = \frac{3}{2}R$ et $C_{Pm} = \frac{5}{2}R$ d'après la relation de Mayer donc $\gamma = \frac{5}{3}$. Par loi des gaz parfaits, $V_0 = 73,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. La pression finale est, par équilibre du piston $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S} = 150350 \text{ Pa}$. Le piston est en permanence en équilibre, c'est donc une adiabatique réversible et on peut appliquer la loi de Laplace : $V_1 = V_0 \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 58,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. On en déduit par loi des gaz parfaits $T_1 = 351 \text{ K}$. Par application de la première identité thermodynamique : $dU = TdS - PdV$ donc $dS = nC_{Vm} \frac{dT}{T} - nR \frac{dV}{V}$; on vérifie que $\Delta S = 0$, l'adiabatique réversible est isentropique.
- La pression finale est la même $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S} = 150350 \text{ Pa}$. Le piston étant transitoirement hors d'équilibre, la transformation n'est pas réversible donc on ne peut pas appliquer Laplace. On revient donc au premier principe : $dU = \delta W + \delta Q$ soit $nC_{Vm}dT = -P_{ext}dV + \delta Q$ avec $P_{ext} = P_1$ (pression extérieure sur le piston) et $\delta Q = 0$ (adiabatique) d'où en intégrant $nC_{Vm}(T_1 - T_0) = -P_1(V_1 - V_0)$. En couplant cette équation avec la loi des gaz parfaits $P_1V_1 = nRT_1$, on en déduit $T_1 = 358 \text{ K}$ puis $V_1 = 59,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.
- Cette transformation est exotique ; on la décompose donc en deux transformations élémentaires :



Dans l'état initial, (1) $P_0V_0 = nRT_0$. La première transformation est une détente de Joule Gay-Lussac : elle est isoénergétique et isotherme car c'est un gaz parfait : (2) $T_1 = T_0$ et (3) $P_1(V + V_0) = nRT_0$. La seconde est analogue à la question précédente (compression adiabatique non réversible monobare ($P_{ext} = P_0$)). La pression finale est donc (4) $P_2 = P_0$, le premier principe donne (5) $P_0V_0 = nC_{Vm}(T_2 - T_0)$ avec (6) $P_0V = nRT_2$. On a donc 6 équations pour 6 inconnues (T_1, T_2, P_1, P_2, V_0 et n). On en déduit $T_f = T_2 = \frac{7}{5}T_0$.

Exercice 2 **Détente de Joule Gay-Lussac**

1. La détente de Joule Gay-Lussac est isoénergétique (voir cours). L'hélium étant un gaz parfait, U ne dépend que de la température donc $dU = 0 \Rightarrow dT = 0$ donc $T_1 = T_0$. Le volume final est $V_1 = 2V_0$. Par application de la loi des gaz parfaits, $P_1 = \frac{P_0}{2}$.
2. Appliquons la première identité thermodynamique :

$$dU = -PdV + TdS \quad \text{soit} \quad 0 = -PdV + TdS \quad \text{donc} \quad dS = \frac{P}{T}dV = nR \frac{dV}{V}$$

En intégrant entre l'état initial et l'état final :

$$\Delta S = nR \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = nR [\ln(2V_0) - \ln V_0] = nR \ln \frac{2V_0}{V_0} = nR \ln 2$$

3. Le système est calorifugé donc $\delta Q = 0$ donc $dS_{\text{éch}} = 0$ et $\Delta S_{\text{éch}} = 0$. On en déduit que

$$\Delta S_{\text{créée}} = \Delta S = nR \ln 2 > 0$$

La transformation est donc irréversible. C'est l'hétérogénéité initiale de pression qui crée l'irréversibilité.

4. Par extensivité de l'entropie :

$$\Delta S = \Delta S_{He} + \Delta S_{Ne} = 2nR \ln 2$$

Comme précédemment, l'entropie échangée est nulle, cette variation d'entropie est égale à l'entropie créée, appelée entropie de mélange ; elle est strictement positive, la transformation est donc irréversible. L'hétérogénéité initiale de concentrations en hélium et en néon crée l'irréversibilité.

Exercice 3 **Transfert corps chaud - corps froid**

1. En appliquant le premier principe au système, par extensivité :

$$dU = dU_1 + dU_2 = 0 \quad \text{donc} \quad CdT_1 + CdT_2 = 0 \quad \text{soit} \quad C(T_f - T_{10}) + C(T_f - T_{20}) = 0$$

d'où $T_f = \frac{T_{10} + T_{20}}{2} = 300 \text{ K}$.

2. Le système des deux corps est hétérogène à l'instant initial, on ne peut donc pas lui appliquer les identités thermodynamiques. Mais en le décomposant, on peut appliquer ces identités à chaque corps séparément :

$$\begin{cases} dS_1 = C \frac{dT_1}{T_1} \\ dS_2 = C \frac{dT_2}{T_2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \Delta S_1 = C \ln \frac{T_f}{T_{10}} = 69,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \\ \Delta S_2 = C \ln \frac{T_f}{T_{20}} = -64,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{cases}$$

Par extensivité de l'entropie :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T_f^2}{T_{10}T_{20}} = 4,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

3. $\Delta S_1 > 0$ et $\Delta S_2 < 0$. Mais chacun de ces deux corps échange de l'énergie thermique avec l'autre, ces variations ne sont donc pas égales à l'entropie créée et leurs signes ne permettent pas de conclure quant à la réversibilité de la transformation. La face du solide 1 au contact du solide 2 sera certainement plus chaude que le reste du solide 1, et réciproquement, celle du solide 2 au contact du solide 1 sera plus froide que le reste du solide 2. Les températures des deux solides ne sont donc pas homogènes au cours de la transformation et l'hétérogénéité créée une irréversibilité. Le système tout entier, lui, n'échange aucune énergie thermique avec l'extérieur (l'échange est interne), donc $\Delta S = S_c > 0$ ce qui prouve l'irréversibilité de la transformation.

Exercice 4 **Transformations avec résistance chauffante**

Dans chaque cas, on écrit le système des six équations en les six inconnues. Les trois équations toujours vraies sont les deux lois des GP et la loi d'équilibre mécanique du piston :

$$(1) P_{1f}V_{1f} = nRT_{1f}, \quad (2) P_{2f}V_{2f} = nRT_{2f} \quad \text{et} \quad (3) P_{1f} = P_{2f}$$

1. Par conservation du volume (4) $V_{1f} + V_{2f} = 2V_0$. L'enceinte de gauche contient un GP qui évolue de façon adiabatique et réversible donc d'après la loi de Laplace (5) $P_{1f}V_{1f}^\gamma = P_0V_0^\gamma$. On écrit le premier principe pour le système tout entier, les forces sur le piston sont des forces intérieures donc le travail reçu par l'un des gaz est égal à celui fourni par l'autre et le travail pour le système est nul. Par extensivité de U :

$$dU_1 + dU_2 = 0 + \delta Q \quad \text{soit} \quad \frac{nR}{\gamma-1}dT_1 + \frac{nR}{\gamma-1}dT_2 = RI^2dt$$

$$\text{donc} \quad (6) \quad \frac{nR}{\gamma-1}[(T_{1f} - T_0) + (T_{2f} - T_0)] = RI^2\Delta t$$

2. Par équilibre du piston de gauche (4) $P_{1f} = P_0$. Par application de la loi de Laplace au gaz de gauche, il vient donc (5) $V_{1f} = V_0$. Par transitivité, la pression du gaz de droite reste constamment égale à P_0 et le premier principe appliqué à ce système donne

$$dU_2 = \delta W_2 + \delta Q_2 \quad \text{soit} \quad \frac{nR}{\gamma-1}dT_2 = -P_0dV_2 + RI^2dt$$

$$\text{donc} \quad (6) \quad \frac{nR}{\gamma-1}(T_{1f} - T_0) = -P_0(V_{2f} - V_0) + RI^2\Delta t$$

3. Par conservation du volume (4) $V_{1f} + V_{2f} = 2V_0$. Par équilibre thermique du gaz de gauche (5) $T_{1f} = T_0$. Celui-ci évolue de façon isotherme donc le premier principe donne

$$0 = \delta Q_1 - P_1dV_1 \quad \text{soit} \quad \delta Q_1 = nRT_0\frac{dV_1}{V_1} \quad \text{donc} \quad Q_1 = nRT_0 \ln \frac{V_{1f}}{V_0}$$

Le premier principe appliqué au système tout entier indéformable donne

$$dU_1 + dU_2 = 0 + \delta Q_1 + \delta Q_2 \quad \text{soit} \quad 0 + \frac{nR}{\gamma-1}dT_2 = \delta Q_1 + RI^2dt$$

$$\text{donc} \quad (6) \quad \frac{nR}{\gamma-1}(T_{1f} - T_0) = nRT_0 \ln \frac{V_{1f}}{V_0} + RI^2\Delta t$$

Exercice 5 Calorimétrie

La faible quantité de glace comparée à la quantité d'eau liquide laisse imaginer que dans l'état final, elle aura complètement fondu.

- Le système formé du calorimètre et de l'eau liquide, de capacité thermique $K + mc_e$, refroidissent de θ_1 à θ_f .
- Le glaçon e capacité thermique m_2c_g , se réchauffe de θ_2 à 0°C , il fond à cette température, puis l'eau de fusion, de capacité thermique m_2c_e , se réchauffe de 0°C à θ_f .

Le système étant calorifugé et isobare, la variation d'enthalpie, somme des deux par extensivité, est nulle :

$$0 = \Delta H_1 + \Delta H_2 = (K + mc_e)(\theta_f - \theta_1) + m_2c_g(0 - \theta_2) + m_2\ell_f + m_2c_e(\theta_f - 0)$$

(remarquons que la relation ne fait apparaître que des différences entre températures, on peut donc rester en degrés Celsius)

$$\text{soit } \theta_f = \frac{(K + mc_e)(\theta_f) + m_2c_g\theta_2 - m_2\ell_f}{K + mc_e + m_2c_e} = 24,15^\circ\text{C}$$

Par application de la deuxième identité thermodynamique, les variations d'entropie sont :

- pour les changements de température :

$$dH = VdP + TdS \quad \text{soit} \quad CdT = 0 + TdS \quad \text{donc} \quad dS = C \frac{dT}{T} \quad \text{et} \quad \Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i}$$

(remarquons que la relation fait apparaître des rapports entre températures, il est donc indispensable de travailler en Kelvin)

- pour les changements d'état isothermes et isobares $\Delta S = \frac{m\ell}{T}$.

Par extensivité :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = (K + mc_e) \ln \frac{273,15 + \theta_f}{273,15 + \theta_1} + m_2c_g \ln \frac{273,15}{273,15 + \theta_2} + \frac{m_2\ell_f}{273,15} + m_2c_e \ln \frac{273,15 + \theta_f}{273,15}$$

$$\text{soit } \Delta S = +0,140 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Exercice 6 **Surfusion du phosphore**

On travaille à pression atmosphérique, on peut donc considérer que la transformation est isenthalpique et on la décompose en deux :

1. le phosphore surfondu se réchauffe à l'état liquide jusqu'à la température de changement d'état :

$$\Delta H_1 = mc_\ell(T_f - T)$$

2. à cette température, il y a solidification partielle d'une masse m_S de phosphore :

$$\Delta H_2 = m_S \ell_S = -m_S \ell_f$$

H étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi :

$$\Delta H = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2 \quad \text{soit} \quad m_S = \frac{mc_\ell(T_f - T)}{\ell_f} = 28,5 \text{ g}$$

On calcule la variation d'entropie par la même décomposition en utilisant la deuxième identité thermodynamique $dH = TdS + VdP$ soit $dS = \frac{dH}{T}$ puisque les transformations sont isobares.

1. pour le réchauffement à l'état liquide

$$dS_1 = \frac{mc_\ell dT}{T} \quad \text{donc} \quad \Delta S_1 = mc_\ell \ln \frac{T_f}{T}$$

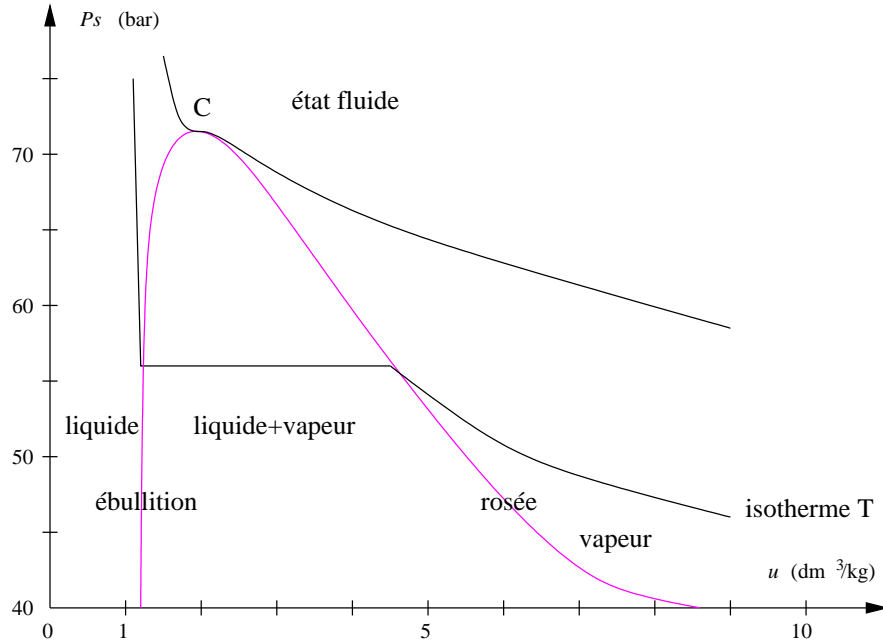
2. pour le changement d'état

$$dS_2 = \frac{dm \ell_S}{T_f} \quad \text{donc} \quad \Delta S_2 = -m_S \frac{\ell_f}{T_f}$$

d'où $\Delta S = mc_\ell \ln \frac{T_f}{T} - m_S \frac{\ell_f}{T_f} = +0,017 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ dont la positivité prouve le caractère spontané de la transformation.

Exercice 7 Exploitation d'un diagramme de Clapeyron

1. Diagramme complété :



Le point critique est au sommet de la courbe de saturation (réunion des courbes de rosée et d'ébullition) :

$$\frac{dP_s}{du} = 0 \Leftrightarrow -\frac{235}{u^2} + \frac{466}{u^3} = 0 \quad \text{donc} \quad u_c = \frac{466}{235} = 1,983 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

On en déduit $P_c = P_s(u_c) = 72,9 \text{ bar}$.

2. Le volume massique est

$$u = \frac{V}{m} = \frac{6,0 \cdot 10^{-3}}{2,0 \cdot 10^{-3}} = 3,0 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

On trace le palier de changement d'état à la pression $P = 60 \text{ bar}$. On mesure aux deux extrémités :

$$u_L = 1,35 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad u_V = 3,7 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

On applique le théorème des moments :

$$x_V = \frac{u - u_L}{u_V - u_L} = 0,702$$

On en déduit

$$m_V = x_V \cdot m = 2,11 \text{ g} \quad \text{et} \quad m_L = m - m_V = 0,89 \text{ g}$$

3. En cas d'incendie, le contenu de la bouteille subit un échauffement isochore. Le point représentatif de l'état du système décrit donc un segment vertical sur le diagramme de Clapeyron. Comme $u < u_c$, l'évolution diphasée se fait avec un titre en vapeur croissant, le segment coupe la courbe de rosée où le système devient totalement gazeux, et la pression dans la bouteille augmente alors modérément (pour que la pression soit multipliée par 2, à volume constant, il faudrait que la température soit aussi multipliée par environ 2 (loi des gaz parfaits)). En revanche, si on avait $u > u_c$, le segment couperait la courbe d'ébullition, le système deviendrait alors totalement liquide, or la pression d'un liquide fortement lorsque la température augmente à volume constant, et la bouteille risquerait d'exploser. C'est pourquoi on remplit toujours les bouteilles de « gaz » avec une faible quantité de liquide.

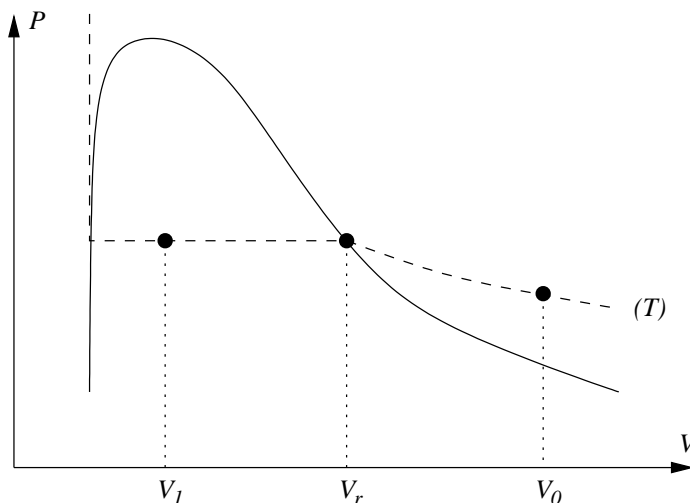
Exercice 8 Changement d'état de l'eau

1. À l'état final, si l'eau était sous forme de vapeur, on aurait la loi des gaz parfaits

$$n_1 = \frac{P_1 V_1}{RT} = 0,692 \text{ mol} < 1 \text{ mol}$$

On a donc un mélange diphasé et P_1 est égal à la pression de vapeur saturante à $T = T_{\text{ext}}$.

2. La transformation se fait le long d'une isotherme, ce qui permet de visualiser les deux étapes de la transformation.



3. On décompose la transformation en deux parties.

- (a) D'abord l'eau est comprimée à l'état de GP de façon isotherme jusqu'au point de rosée où $P = P_{\text{sat}} = P_1$ et $V_r = \frac{1RT}{P_1} = 1,08 \text{ m}^3$:

$$\delta W' = -PdV = -nRT \frac{dV}{V} \quad \text{donc} \quad W' = -1RT \ln \frac{V_r}{V_0} = 2538 \text{ J}$$

- (b) Le mélange diphasé est comprimé de façon isotherme et isobare du point de rosée jusqu'au point final :

$$\delta W'' = -P_1 dV \quad \text{donc} \quad W'' = -P_1(V_1 - V_r) = 4406 \text{ J}$$

En supposant que la transformation est lente et quasistatique, $W = W' + W'' = 6944 \text{ J}$.

4. On suppose que le volume occupé par la phase liquide est négligeable devant le volume à l'état de vapeur, donc $V_v \simeq V_1$ et $n_v = n_1 = 0,692 \text{ mol}$. Par suite $x_v = \frac{m_v}{m} = \frac{n_v}{n} = 0,692$.

Exercice 9 Calorimètre à glace

1. Le piston est à l'équilibre mécanique donc $P_1 = P_0$. La transformation est adiabatique et monobare à la pression extérieure P_0 , donc par application du premier principe :

$$dU = \delta Q + \delta W \quad \text{soit} \quad \frac{nr}{\gamma - 1} dT = 0 - P_0 dV \quad \text{donc} \quad \frac{nr}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) = -P_0 (V_1 - V_0)$$

La loi des gaz parfaits s'écrit, dans l'état initial $\frac{P_0}{2} V_0 = nRT_0$ et dans l'état final $P_0 V_1 = nRT_1$. On en déduit

$$\frac{nr}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) = -nR(T_1 - 2T_0) \quad \text{donc} \quad T_1 = \frac{2\gamma - 1}{\gamma} T_0$$

En faisant le rapport des deux lois des gaz parfaits, le volume final est donc

$$V_1 = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{T_1}{T_0} = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} V_0$$

2. Le mélange eau-glace évolue à pression, donc à température constante tant qu'il existe de la glace, donc $T'_1 = T_0$ et $P'_1 = P_0$ donc $V'_1 = \frac{V_0}{2}$ d'après la loi des gaz parfaits.
3. Le système (1) est le siège d'un changement d'état isotherme et isobare, donc par application de la deuxième identité thermodynamique :

$$dH = VdP + TdS \quad \text{soit} \quad dS = \frac{dH}{T_0} \quad \text{donc} \quad \Delta S_1 = \frac{m\ell_f}{T_0}$$

où m est la masse de glace qui fond et ℓ_f l'enthalpie massique de fusion. Or $m\ell_f$ est aussi l'énergie thermique Q_2 reçue par (2), donc l'opposé de celle Q_1 reçue par (1). En appliquant le premier principe à (1) :

$$\Delta U_1 = W_1 + Q_1 \quad \text{donc} \quad Q_2 = -Q_1 = W_1 - \Delta U_1 = -P_0(V'_1 - V_1) - \frac{nR}{\gamma - 1} (T_0 - T_1) = nRT_0$$

d'où $\Delta S_1 = nR$. Appliquons la première identité thermodynamique au système (2) :

$$\frac{nR}{\gamma - 1} dT = -PdV + TdS \quad \text{donc} \quad dS = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$\text{donc} \quad \Delta S_2 = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_0}{T_0} + nR \ln \frac{V_1}{V_0} = nR \ln \frac{2\gamma - 1}{2\gamma}$$

Exercice 10 **Dilution unidirectionnelle**

1. Exprimons les dérivées première par rapport à t et seconde par rapport à x :

$$T(x, t) = At^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{A}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{Ax^2}{4D} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{Ax}{2D} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{A}{2D} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{Ax^2}{4D^2} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

On a donc bien $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ donc l'équation de diffusion est vérifiée et D est le coefficient de diffusion thermique.

2. L'argument de l'exponentielle est sans dimension. On connaît les termes $e^{-\frac{t}{\tau}}$, $e^{-\frac{x}{L}}$ et $e^{-\frac{x^2}{L^2}}$. On écrit donc :

$$\frac{x^2}{4Dt} = \frac{x^2}{L^2} \cdot \frac{\tau}{t}$$

où τ est un temps caractéristique et L une longueur caractéristique du phénomène de diffusion. Par identification :

$$\frac{L^2}{\tau} = 4D$$

qui est (au facteur 4 près) la relation entre les ordres de grandeur donnée par le cours.

3. Pour $t \rightarrow 0$, la courbe est nulle partout (l'exponentielle tend vers zéro et domine le coefficient $\frac{A}{\sqrt{t}}$) et infinie pour $x = 0$ (l'exponentielle vaut 1 et $\frac{A}{\sqrt{t}}$ tend vers l'infini) : on a donc une température très forte en $x = 0$, et nulle partout ailleurs. Pour $t \rightarrow \infty$, la courbe est nulle partout.
4. Pour tout $x \neq 0$, la température vaut 0 à l'instant initial et tend vers 0 quand t tend vers l'infini : elle passe donc nécessairement par un maximum, lorsque l'onde thermique passe.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow -\frac{A}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{Ax^2}{4D} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = 0 \quad \text{donc} \quad t_m = \frac{x^2}{D\sqrt{2}}$$

5. Les graphes évoquent un passage d'une forte hétérogénéité de température (très chaud au voisinage de $x = 0$ et très faible ailleurs) à une situation uniforme (très froid partout) : tout se passe comme si l'énergie interne se diluait sur un barreau rectiligne infini.

Exercice 11 Théorie des caves

1. T_m est la température moyenne, soit $T_m = 300$ K, T_a est l'amplitude thermique, soit $T_a = 10$ K, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation donc $\omega = \frac{2\pi}{86400}$. Pour $z = 0$ et $t = 0$, T est la température du sol 16 heures, elle est maximale donc $\varphi = 0$.
2. On prend $\varepsilon = +1$ qui correspond à une propagation dans le sens des z décroissants, du sol vers le sous-sol.
3. Calculons les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= -\omega T_a e^{\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t + kz) \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{T_a}{\delta} \cos(\omega t + kz) - k T_a \sin(\omega t + kz) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \left[\frac{1}{\delta^2} - k^2 \right] T_a e^{\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t + kz) - \frac{2k}{\delta} T_a e^{\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t + kz)\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de diffusion thermique $\frac{\partial T}{\partial t} = D_Q \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$, on identifie les coefficients des termes en sinus et en cosinus :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta^2} - k^2 &= 0 \quad \text{et} \quad -\frac{2kQD}{\delta} = -\omega \\ \text{donc} \quad k &= \frac{1}{\delta} \quad \text{et} \quad \omega \delta^2 = 2D_Q\end{aligned}$$

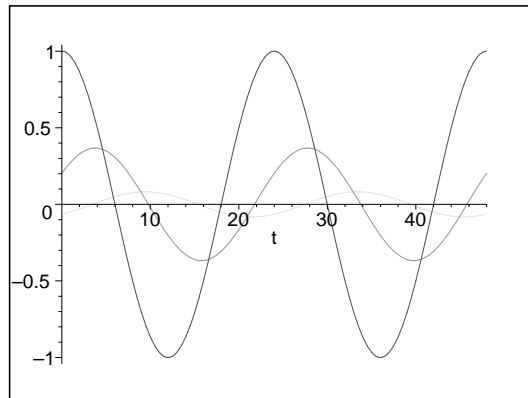
4. L'application numérique donne

$$D_Q = \frac{\lambda}{\mu c} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D_Q}{\omega}} = 8,1 \text{ cm}$$

La fonction de température est donc

$$T(z, t) = 300 + 10e^{\frac{z}{0,081}} \cos\left(2\pi \frac{t}{86400} + \frac{z}{0,081}\right)$$

5. T est donc une fonction sinusoïdale du temps dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la profondeur. Les courbes sont déphasées, il y a un retard de l'onde thermique dû à sa propagation du sol vers le sous-sol.



Pour $z < -5\delta$ soit $z < -40,5$ cm, les variations diurnes de T sont quasiment nulles : la température est alors extrêmement stable. Avec les mêmes expressions littérales, mais en étudiant les variations annuelles de la température, on obtient qu'à quelques mètres sous terre, la température ne varie quasiment pas au cours de l'année, c'est ce qu'on observe dans une cave.

Exercice 12 **Diffusion avec création proportionnelle**

1. La nullité à toute date de T en $x = 0$ et en $x = L$ entraîne

$$\nu(0) = \nu(L)$$

2. Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta \nu(x) e^{\beta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \nu'(x) e^{\beta t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \nu''(x) e^{\beta t}$$

En remplaçant dans l'équation de diffusion, il vient :

$$\beta \nu(x) e^{\beta t} = D \nu''(x) e^{\beta t} + k \nu(x) e^{\beta t}$$

$$\text{donc} \quad \nu''(x) + \frac{k - \beta}{D} \nu(x) = 0$$

3. Supposons d'abord que $k < \beta$ et posons $\frac{k - \beta}{D} = -\frac{1}{\delta^2}$. L'équation s'écrit

$$\nu''(x) - \frac{1}{\delta^2} \nu(x) = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ donc $r = \pm \frac{1}{\delta}$. La solution générale de l'équation est donc

$$\nu(x) = A e^{-\frac{x}{\delta}} + B e^{\frac{x}{\delta}}$$

Les conditions aux limites donnent en $x = 0$: $A + B = 0$ et en $x = L$: $A e^{-\frac{L}{\delta}} + B e^{\frac{L}{\delta}} = 0$. Ce système, de déterminant non nul car $L \neq 0$, est un système de Cramer dont l'unique solution est $A = B = 0$, donc $\nu(x) = 0$ et $T(x, t) = 0$ (solution triviale) : on rejette donc ce cas. De même, si $k = \beta$, $\nu''(x) = 0$ donc $\nu(x) = Ax + B$; les conditions aux limites donnent $B = 0$ et $AL + B = 0$ donc $A = B = 0$ et on rejette aussi ce cas. Par conséquent, $k > \beta$.

4. Posons alors $\frac{k - \beta}{D} = \frac{1}{\delta^2}$. L'équation s'écrit

$$\nu''(x) + \frac{1}{\delta^2} \nu(x) = 0$$

C'est une équation du type oscillateur harmonique, donc

$$\nu(x) = A \cos \frac{x}{\delta} + B \sin \frac{x}{\delta}$$

Les conditions aux limites donnent en $x = 0$: $A = 0$ et en $x = L$: $B \sin \frac{L}{\delta} = 0$. Pour que B ne soit pas nul lui-aussi, il faut donc que

$$\sin \frac{L}{\delta} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{L}{\delta} = n\pi$$

où n est un entier naturel non nul (car $L > 0$). Dans ce cas, la solution générale est donc

$$\nu(x) = B \sin \left(n\pi \frac{x}{L} \right) \quad \text{et} \quad T(x, t) = B \sin \left(n\pi \frac{x}{L} \right) e^{\beta t}$$

Or une température ne peut pas être négative, donc pour $x \in [0, L]$, le sinus ne doit pas changer de signe. Sa période est $\frac{2L}{n}$, donc nécessairement $n = 1$. On a donc montré que

$$\frac{L}{\delta} = \pi \quad \text{soit} \quad L \sqrt{\frac{k - \beta}{D}} = \pi$$

5. La relation précédente donne

$$\beta = k - \frac{\pi^2 D^2}{L^2}$$

Si $\beta < 0$, $T(x, t)$ tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$, mais si $\beta > 0$, $T(x, t)$ tend vers l'infini quand $t \rightarrow \infty$. Il y a donc danger si

$$k - \frac{\pi^2 D^2}{L^2} > 0 \quad \text{soit} \quad D > \frac{kL^2}{\pi^2}$$

donc $D^* = \frac{kL^2}{\pi^2}$.

Exercice 13 **Second principe et conduction thermique**

1. Nous sommes dans les conditions d'application de la loi des résistances thermiques : régime quasi-stationnaire et géométrie unidimensionnelle. La résistance du barreau est $R = \frac{\lambda S}{L}$ et le flux (mesuré dans le sens de 1 vers 2) est donc

$$\Phi(t) = \frac{\lambda S}{L}(T_1(t) - T_2(t))$$

2. Appliquons le premier principe aux deux solides indéformables : pour chacun d'eux, $\delta W = 0$. L'énergie thermique reçue par le solide 1 pendant dt est $-\Phi(t) \cdot dt$ et celle reçue par le solide 2 est $+\Phi(t) \cdot dt$. Par conséquent :

$$\begin{cases} CdT_1 = -\frac{\lambda S}{L}(T_1(t) - T_2(t))dt \\ CdT_2 = \frac{\lambda S}{L}(T_1(t) - T_2(t))dt \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \frac{dT_1}{dt} = -\frac{1}{2\tau}T_1(t) + \frac{1}{2\tau}T_2(t) \\ \frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{2\tau}T_1(t) - \frac{1}{2\tau}T_2(t) \end{cases}$$

avec $\tau = \frac{2\lambda S}{LC}$. En effectuant la somme et la différence de ces deux équations, et en posant $S(t) = T_1(t) + T_2(t)$ et $D(t) = T_1(t) - T_2(t)$, il vient :

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dD}{dt} = -\frac{1}{\tau}D$$

Ces deux équations s'intègrent de façon immédiate et en utilisant les conditions initiales $S(0) = T_{10} + T_{20}$ et $D(0) = T_{10} - T_{20}$, on en déduit

$$\begin{cases} S(t) = T_{10} + T_{20} \\ D(t) = T_{10} - T_{20}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} T_1(t) = \frac{S(t)+D(t)}{2} = \frac{T_{10}+T_{20}}{2} + \frac{T_{10}-T_{20}}{2}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ T_2(t) = \frac{S(t)-D(t)}{2} = \frac{T_{10}+T_{20}}{2} - \frac{T_{10}-T_{20}}{2}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

3. Quand $t \rightarrow \infty$:

$$T_{1f} = T_{2f} = T_f = \frac{T_{10} + T_{20}}{2}$$

4. Par application de la première identité thermodynamique :

$$\begin{cases} dS_1 = \frac{CdT_1}{T_1} \\ dS_2 = \frac{CdT_2}{T_2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \Delta S_1 = C \ln \frac{T_f}{T_{10}} \\ \Delta S_2 = C \ln \frac{T_f}{T_{20}} \end{cases}$$

Par extensivité :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T_f^2}{T_{10}T_{20}}$$

5. Le système complet n'échange pas d'énergie thermique avec l'extérieur. ΔS est donc l'entropie créée. Cherchons son signe. Pour comparer le rapport $\frac{T_f^2}{T_{10}T_{20}}$ à 1, faisons la différence entre le numérateur et le dénominateur :

$$T_f^2 - T_{10}T_{20} = \left[\frac{T_{10} + T_{20}}{2} \right]^2 - T_{10}T_{20} = \frac{T_{10}^2 + 2T_{10}T_{20} + T_{20}^2 - 4T_{10}T_{20}}{4} = \left[\frac{T_{10} - T_{20}}{2} \right]^2$$

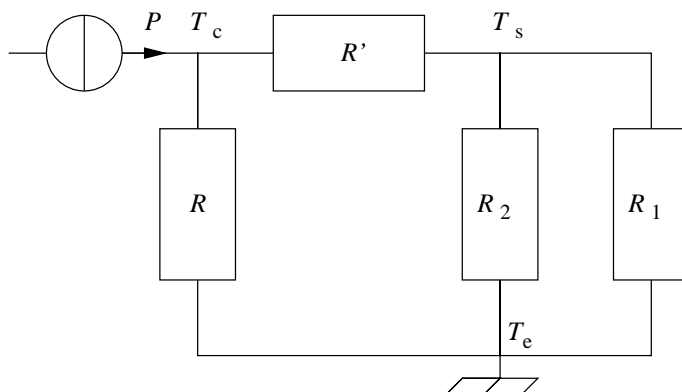
On en conclut que $T_f^2 \geq T_{10}T_{20}$, l'inégalité étant stricte si et seulement si $T_{10} \neq T_{20}$. Par conséquent, $\Delta S \geq 0$ et la transformation irréversible dès que $T_{10} \neq T_{20}$.

Exercice 14 Étude d'une capsule spatiale

1. Par application des formules du cours :

$$R_1 = \frac{e}{\lambda \pi r_1^2} \quad \text{et} \quad R' = \frac{e'}{\lambda' \pi r_1^2}$$

2. Il y a une forte analogie avec la résistance thermique unidirectionnelle : au numérateur, on reconnaît l'épaisseur de la paroi. Au dénominateur, on reconnaît la surface d'une paroi de rayon moyen $r_m = \frac{r_1+r_2}{2}$: celle de la demi-sphère ($\frac{1}{2} \cdot 4\pi r_m^2$) pour R , celle de la paroi latérale du cylindre pour R_2 ($2\pi r_m H$). Les deux expressions sont donc bien du type $\frac{e}{\lambda S}$.
3. Voici le schéma électrique équivalent du dispositif (l'extérieur, au zéro absolu, est représenté par la masse) :



Les lois des nœuds en C et en S s'écrivent respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \frac{T_c - T_e}{R} + \frac{T_c - T_s}{R'} \\ \frac{T_c - T_s}{R'} = \frac{T_s - T_e}{R_2} + \frac{T_s - T_e}{R_1} \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = \frac{T_c - T_e}{R} + \frac{T_s}{R_2} + \frac{T_s}{R_1} = 1590 \text{ W} \\ \frac{1}{R'} = \frac{\frac{T_s}{R_2} + \frac{T_s}{R_1}}{T_c - T_s} = 42 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \end{array} \right.$$

4. Comme le sas n'est pas équipé d'un système de chauffage, il n'est chauffé que par l'énergie thermique qui traverse la cloison par conduction, λ' doit donc être faible.
5. Il y a chauffage par rayonnement, il faut donc équiper le dôme d'un bouclier thermique et / ou d'un système de climatisation.

Exercice 15 **Croissance d'une couche de glace**

1. La couche de glace d'épaisseur e et de surface S se comporte comme une résistance thermique $\frac{e}{\lambda S}$ entre l'eau à $\theta = i$ et l'air à θ_e . Le flux thermique qui la traverse, de l'eau vers l'air (du bas vers le haut) est donc

$$\Phi = \frac{\lambda S}{e}(\theta_i - \theta_e)$$

Pendant l'intervalle de temps dt , la couche de glace croît de de . Il y a donc solidification de $\mu S de$ d'eau qui libère Φdt . Le bilan thermique s'écrit donc

$$\frac{\lambda S}{e}(\theta_i - \theta_e)dt = \mu S h_f \cdot de$$

2. L'équation différentielle s'écrit donc

$$e \cdot de = \beta dt \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu h_f}(\theta_i - \theta_e)$$

3. C'est une équation à variables séparables :

$$\int_0^e e \cdot de = \int_0^t \beta dt \quad \text{donc} \quad e = \sqrt{\beta t}$$

Exercice 16 **Température au centre de la Terre**

1. La couche a un volume

$$\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \simeq 4\pi r^2 dr$$

Pendant dt , les échanges thermiques qu'elle subit sont :

- une énergie thermique par conduction venant des couches internes :

$$\delta Q_r = j(r) \cdot 4\pi r^2 \cdot dt$$

- une énergie thermique par conduction cédée vers les couches externes :

$$\delta Q_{r+dr} = j(r+dr) \cdot 4\pi(r+dr)^2 \cdot dt$$

- une énergie thermique créée par désintégrations radioactives :

$$\delta Q_i = \mathcal{P}_V \cdot 4\pi r^2 dr \cdot dt$$

En régime permanent, le premier principe s'écrit

$$dU = \delta W + \delta Q \quad \text{soit} \quad 0 = 0 + \delta Q_r - \delta Q_{r+dr} + \delta Q_i$$

$$\text{soit } \mathcal{P}_V \cdot 4\pi r^2 dr dt = j(r+dr)4\pi(r+dr)^2 dt - j(r)4\pi r^2 dt$$

$$\text{soit } \mathcal{P}_V r^2 = \frac{(r+dr)^2 j(r+dr) - r^2 j(r)}{dr}$$

$$\text{d'où } \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r} = \mathcal{P}_V r^2$$

2. La loi de Fourier s'écrit
- $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$
- soit
- $j(r) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$
- .

3. On intègre l'équation en
- j
- :

$$r^2 j(r) = \mathcal{P}_V \frac{r^3}{3} + K \quad \text{donc} \quad j(r) = \frac{\mathcal{P}_V}{3} r + \frac{K}{r^2}$$

j ne pouvant pas être infini au centre de la Terre, $K = 0$ donc $j(r) = \frac{\mathcal{P}_V}{3} r$ et $T(r) = T_0 - \frac{\mathcal{P}_V}{6\lambda} r^2$
En $r = R$, on a la condition aux limites s'écrit

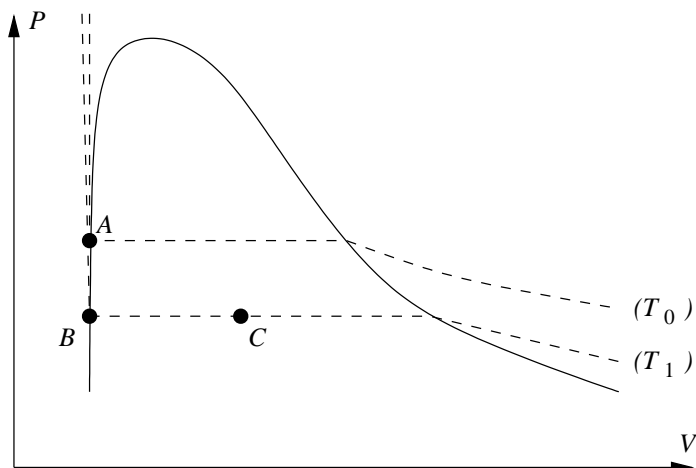
$$j(R) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r=R) = -\lambda \cdot \frac{-30}{1000} = 0,03\lambda$$

donc $\frac{\mathcal{P}_V}{3} R = 0,03\lambda$ et $j(r) = 0,03\lambda \frac{r}{R}$ d'où $T = T_0 - 0,015 \frac{r^2}{R}$

- 4.
- $T(R) \simeq 0$
- (température du cosmos interplanétaire, en négligeant l'épaisseur de l'atmosphère devant le rayon de la Terre) donc
- $0 = T_0 - 0,015R$
- donc
- $T_0 = 0,015R = 95700 \text{ K}$
- .

Exercice 17 **Détente de Joule-Thomson**

1. Voir cours.
2. Le changement d'état n'est ni isotherme ni isobare. On décompose donc la transformation en utilisant le fait que l'enthalpie est une fonction d'état et que sa variation ne dépend donc pas du chemin suivi. Traçons l'allure du chemin dans le diagramme de Watt :



De A à B , le système subit un refroidissement à l'état liquide le long de la courbe d'ébullition :

$$\Delta H_{AB} = mc(T_1 - T_0)$$

De B à C , le système subit la vaporisation partielle isobare et isotherme d'une masse $x_V m$ de liquide :

$$\Delta H_{BC} = x_V m h_{\text{vap}}$$

La détente de Joule-Thomson est isenthalpique donc

$$\Delta H = 0 = \Delta H_{AB} + \Delta H_{BC} \quad \text{soit} \quad mc(T_1 - T_0) + x_V m h_{\text{vap}} = 0$$

$$\text{d'où } x_V = \frac{c(T_0 - T_1)}{h_{\text{vap}}}.$$

Exercice 18 **Relation de Bernoulli**

1. Appliquons le premier principe en système ouvert : le système ne reçoit ni énergie thermique ni travail utile, donc

$$\Delta ec + \Delta ep + \Delta h = 0 \quad \text{soit} \quad ec_1 + ep_1 + u_1 + P_1 v_1 = ec_2 + ep_2 + u_2 + P_2 v_2$$

- D'après l'énoncé, $u_1 = u_2$;
- le volume massique v est l'inverse de la masse volumique μ , soit $v = \frac{1}{\mu}$;
- l'énergie cinétique massique est $ec = \frac{1}{2}V^2$;
- l'énergie potentielle massique de pesanteur est $ep = gz$.

On en déduit que

$$\frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 + \frac{P_1}{\mu_1} = \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 + \frac{P_2}{\mu_2}$$

$$\text{soit } P_1 + \mu \frac{V_1^2}{2} + \mu gz_1 = P_2 + \mu \frac{V_2^2}{2} + \mu gz_2.$$

2. Vidange d'un réservoir.

- (a) En appliquant la relation de Bernoulli entre le point A et le point E :

$$P_A + \mu_A \frac{V_A^2}{2} + \mu_A g z_A = P_E + \mu_E \frac{V_E^2}{2} + \mu_E g z_E$$

L'eau est incompressible donc $\mu_A = \mu_B = \mu$, elle est à la pression atmosphérique en A et en E donc $P_A = P_E = P_0$, l'énoncé précise que $V_A \ll V_E$ et les altitudes sont $z_A = H$ et $z_E = -h$, donc

$$P_0 + \mu g H = P_0 + \mu \frac{V_E^2}{2} - \mu g h = 0$$

donc $v_E = \sqrt{2g(H+h)}$ (relation de Torricelli). En appliquant la relation de Bernoulli entre B et E :

$$P_B + \mu \frac{V_B^2}{2} + \mu g \cdot 0 = P_0 + \mu \frac{V_E^2}{2} - \mu g h$$

Or la section S de la canalisation est la même en B et en E ; par conservation du débit massique :

$$\mu S V_B = \mu S V_E \quad \text{donc} \quad V_B = V_E$$

Par conséquent :

$$P_B = P_0 - \mu g h$$

- (b) Cette pression peut s'annuler si $P_0 = \mu g h$, elle peut donc être inférieure à P_S . Remarquons que c'est en B que la pression est la plus faible dans la canalisation, car c'est le point d'altitude la plus élevée.
- (c) La relation de Bernoulli appliquée entre A et E' donne le même résultat que précédemment et $v_{E'} = \sqrt{2g(H+h)}$. Par conservation du débit entre B et E' :

$$\mu S V_B = \mu s V_{E'} \quad \text{donc} \quad V_B = \frac{s}{S} \sqrt{2g(H+h)}$$

En appliquant la relation de Bernoulli entre B et E' :

$$P_B + \mu \frac{V_B^2}{2} + \mu g \cdot 0 = P_0 + \mu \frac{V_{E'}^2}{2} - \mu g h$$

$$\text{soit } P_B = P_0 - \mu g h + \mu g (H+h) \left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right)$$

La condition de non cavitation est donc $P_B > P_S$ soit

$$s < S \sqrt{1 - \frac{P_S - P_0 + \mu g h}{\mu g (H+h)}}$$

Exercice 19 **Pompe**

1. Pendant l'intervalle de temps dt , l'eau dans la canalisation cylindrique se déplace de $V_0 \cdot dt$. À travers une surface de contrôle S passe donc une masse $dm = \mu_0 S \cdot V_0 dt$ d'eau, le débit est donc

$$D_0 = \frac{dm}{dt} = \frac{\mu_0 S \cdot V_0 dt}{dt} = \mu_0 S \cdot V_0$$

donc $v_0 = \frac{D_0}{\mu_0 S}$.

2. Appliquons la relation de Bernoulli entre un point A au fond du lac loin de la pompe et un point E à l'entrée de la pompe :

$$P_A + \mu \frac{V_A^2}{2} + \mu g(-h) = P_e + \mu \frac{V_e^2}{2} + \mu g(-h)$$

En A , l'eau est immobile donc $V_A = 0$. En appliquant la loi de l'hydrostatique entre le fond du lac en A et le point A_0 à la surface du lac au dessus de A :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu_0 g \quad \text{donc} \quad \int_{A_0}^A dP = \int_{z=0}^{-h} \mu_0 g dz$$

$$\text{soit} \quad P_A - P_0 = 0 + \mu_0 gh \quad \text{et} \quad P_A = P_0 + \mu_0 gh$$

On en déduit que $P_e = P_0 + \mu_0 gh - \mu_0 \frac{V_e^2}{2}$.

3. Appliquons le premier principe en système ouvert entre l'entrée et la sortie de la pompe :

$$ec_s - ec_e + ep_s - ep_e + u_s + P_s v_s - u_e - P_e v_e = w_u + q$$

- Les vitesses sont identiques donc $ec_s = ec_e$.
- Les altitudes sont $z_e = -h$ et $z_s = 0$ donc $ep_s - ep_e = gh$.
- Les énergies internes sont identiques d'après l'énoncé donc $u_s = u_e$.
- Les volumes massiques sont les inverses des masses volumiques donc $v_s = v_e = \frac{1}{\mu_0}$.
- D'après le cours, $w_u = \frac{\mathcal{P}_m}{D_0}$.
- D'après l'énoncé, $q = 0$.

On en déduit que

$$gh + \frac{P_0}{\mu_0} - \frac{P_e}{\mu_0} = \frac{\mathcal{P}_m}{D_0}$$

$$\text{soit} \quad \mathcal{P}_m = D_0 gh + \frac{D_0 P_0}{\mu_0} - \frac{D_0 \left(P_0 + \mu_0 gh - \mu_0 \frac{V_0^2}{2} \right)}{\mu_0} = D_0 \frac{V_0^2}{2}$$

Exercice 20 Sèche-cheveux

1. Pendant l'intervalle de temps dt , l'air à la sortie se déplace de $V_s \cdot dt$. À travers la surface de contrôle S passe donc une masse $dm = \mu_s S \cdot V_s dt$ d'air, le débit est donc

$$D_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\mu_s S \cdot V_s dt}{dt} = \mu_s S \cdot V_s$$

La relation $n = \frac{m}{M}$ donne

$$dn = dn_e = dn_s = \frac{dm}{M} = \frac{D_m dt}{M}$$

La loi des gaz parfaits donne

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad \text{soit} \quad PM = \frac{m}{V}RT = \mu RT \quad \text{donc} \quad \mu_s = \frac{PM}{RT_s}$$

On en déduit que

$$V_s = \frac{D_m}{S\mu_s} = \frac{D_m RT_s}{SPM}$$

2. Appliquons le premier principe en système ouvert entre l'entrée et la sortie :

$$ec_s - ec_e + ep_s - ep_e + h_s - h_e = w_u + q$$

- La vitesse à l'entrée est presque nulle et elle vaut V_s à la sortie.
- Les altitudes sont les mêmes donc $ep_s = ep_e$.
- L'air étant assimilé à un gaz parfait :

$$h_s - h_e = c_P(T_s - T_e) = \frac{C_{Pm}}{M}\Delta T$$

- D'après le cours, $w_u = \frac{\mathcal{P}_m}{D_m}$ et $q = \frac{\mathcal{P}_{th}}{D_m}$.

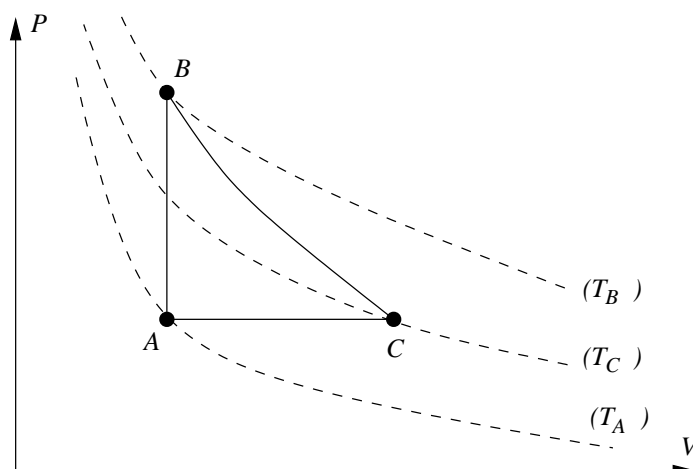
On en déduit que

$$\frac{V_s^2}{2} + \frac{C_{Pm}}{M}\Delta T = \frac{\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_{th}}{D_m} \quad \text{donc} \quad \mathcal{P} = D_m \left[\frac{V_s^2}{2} + \frac{C_{Pm}}{M}\Delta T \right]$$

3. En prenant $V_s \simeq 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $D_m \simeq 5 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\Delta T \simeq 30 \text{ K}$, on remarque que la puissance mécanique est négligeable devant la puissance thermique et on obtient $\mathcal{P} \simeq 150 \text{ W}$.
4. L'air chaud est susceptible de se charger de beaucoup plus d'humidité que l'air froid ; de plus, le courant d'air assure le renouvellement permanent d'air chaud et sec, dont la pression partielle en eau est presque nulle.

Exercice 21 **Cycle de Lenoir**

Traçons le diagramme de Watt du cycle.



1. Il est immédiat que $V_A = V_B$ et $P_A = P_C$. La loi de Laplace donne $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$.
2. L'énergie utile est $-W = -W_{AB} - W_{BC} - W_{CA}$ et l'énergie coûteuse est la somme des énergies thermiques positives reçues par le fluide, donc Q_{AB} . Calculons les quatre termes.
 - (AB) est une compression isochore donc

$$W_{AB} = \int_A^B -P dV = 0$$

– Le premier principe appliqué à (AB) donne donc

$$\Delta U_{AB} = 0 + Q_{AB} \quad \text{soit} \quad Q_{AB} = C_V(T_B - T_A) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A)$$

soit $Q_{AB} = \frac{1}{\gamma - 1}(P_B V_B - P_A V_A)$.

– (BC) est une détente adiabatique réversible donc le premier principe donne

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + 0 \quad \text{soit} \quad W_{BC} = C_V(T_C - T_B) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B)$$

soit $W_{BC} = \frac{1}{\gamma - 1}(P_C V_C - P_B V_B)$.

– (CA) est un refroidissement isobare donc

$$W_{CA} = \int_C^A -P dV = -P_A \int_{V_C}^{V_A} dV = -P_A(V_A - V_C)$$

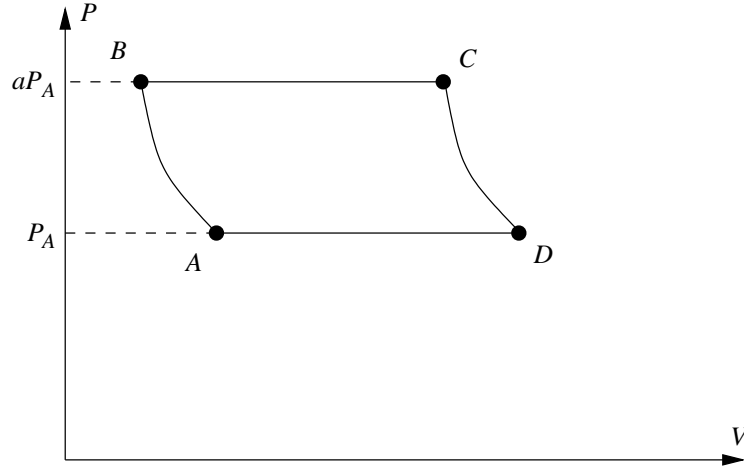
soit $W_{CA} = -P_A V_A + P_C V_C$ car $P_A = P_C$.

On en déduit le rendement :

$$\rho = \frac{-W}{Q_{AB}} = \frac{\frac{1}{\gamma - 1}(P_B V_B - P_C V_C) + P_A V_A - P_C V_C}{\frac{1}{\gamma - 1}(P_B V_B - P_A V_A)}$$

Exercice 22 **Turboréacteur**

1. Voici l'allure du diagramme :



2. Les transferts thermiques sont lents et les pressions dans les gaz sont à peu près homogènes, donc les transformations réversibles.
 3. Par application de la loi de Laplace sur la transformation adiabatique réversible (A, B) :

$$P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma \quad \text{donc} \quad \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

donc $\frac{T_A}{T_B} = a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

4. Les lois de Laplace entre A et B et entre D et C sont jumelles car les pressions sont les mêmes ; on en déduit que

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C} \quad \text{soit} \quad \frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}$$

5. Pour les transformations
 – isobares : $W = -P(V_f - V_i)nR(T_i - T_f)$ et $Q = \Delta H = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}(T_f - T_i)$;
 – adiabatiques réversibles : $Q = 0$ donc $W = \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_i)$.

On peut donc calculer systématiquement les travaux et énergies thermiques pour les quatre transformations :

transformation	W	Q
(AB)	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A)$	0
(BC)	$nR(T_B - T_C)$	$\frac{\gamma nR}{\gamma-1}(T_C - T_B)$
(CD)	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_C)$	0
(DA)	$nR(T_D - T_A)$	$\frac{\gamma nR}{\gamma-1}(T_A - T_D)$

On vérifie que la seule énergie thermique positive reçue par le fluide est Q_{BC} et le rendement du moteur est donc

$$\rho = \frac{-W}{Q_{BC}}$$

Par application du premier principe au cycle tout entier :

$$\Delta U = 0 = W + [0 + Q_{BC} + 0 + Q_{DA}] \quad \text{donc} \quad -W = Q_{BC} + Q_{DA}$$

On en déduit que

$$\rho = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

En remplaçant, on obtient donc

$$\rho = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$$

6. On peut écrire

$$\rho = 1 + \frac{T_A \left(1 - \frac{T_D}{T_A}\right)}{T_B \left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right)}$$

et en utilisant le résultat de la question 4, on simplifie cette expression :

$$\rho = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Exercice 23 **Pompe à chaleur avec pseudo-source**

1. Travaillons en Kelvin. Il ne faut pas confondre le bilan thermodynamique pour le fluide qui circule dans la pompe à chaleur et celui pour la source chaude. Pour la machine, on utilise les lois habituelles du cycle de Carnot pour déterminer le travail δW nécessaire pour donner l'énergie thermique δQ_c à la source chaude et la réchauffer ainsi de dT_c . Par application du premier et du second principe au cycle supposé réversible :

$$\delta W + \delta Q_c + \delta Q_f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} = 0 \quad \text{donc} \quad \delta W = -\delta Q_c \left[1 - \frac{T_f}{T_c} \right]$$

Par application du premier principe au système de la source chaude indéformable, recevant $-\delta Q_c$ de la part de la pompe à chaleur :

$$dU = 0 + \delta Q \quad \text{soit} \quad mc_{eau}dT_c = -\delta Q_c$$

On en déduit la relation infinitésimale

$$\delta W = mc_{eau}dT_c \left[1 - \frac{T_f}{T_c} \right]$$

2. On intègre l'expression

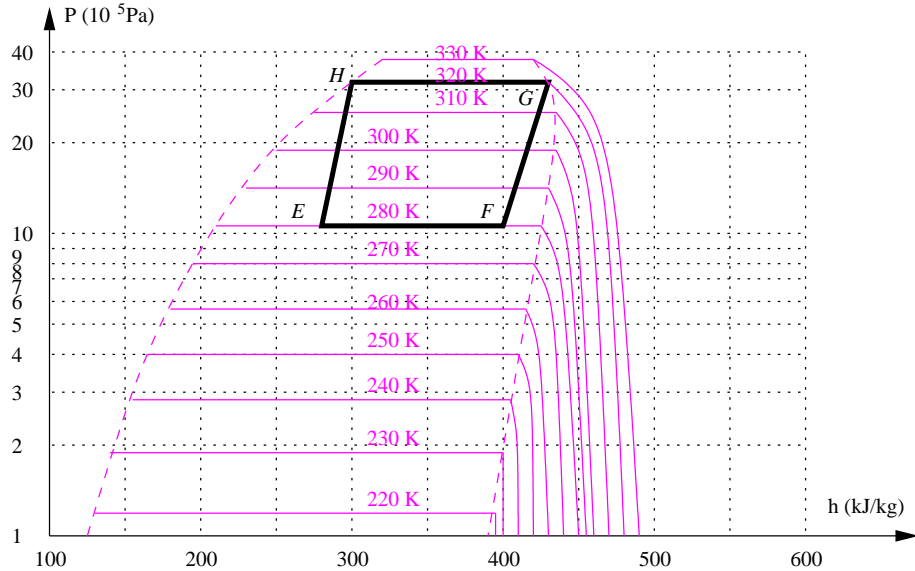
$$W = mc_{eau} \int_{T_c=T_0}^{T_1} \left[1 - \frac{T_f}{T_c} \right] dT_c$$

$$\text{donc} \quad W = mc_{eau} \left[(333 - 293) - 278 \ln \frac{333}{293} \right] = 37,2 \text{ MJ}$$

On en déduit la puissance moyenne $\mathcal{P} = \frac{W}{7200} = 5,16 \text{ kW}$.

Exercice 24 Étude d'un climatiseur

On repère les quatre points sur le diagramme grâce à leurs températures, leurs propriétés de point de rosée ou de point d'ébullition, leurs enthalpies massiques :



1. Par lecture directe, on trouve $P_1 = 11 \cdot 10^5$ Pa et $P_2 = 32 \cdot 10^5$ Pa.
2. L'unité de masse du fluide au point E est constituée d'une masse x_E de gaz et d'une masse $(1 - x_E)$ de liquide. Son enthalpie massique vaut donc

$$h_E = x_E h_V + (1 - x_E) h_L \quad \text{donc} \quad x_E = \frac{h_E - h_L}{h_V - h_L}$$

On a ainsi redémontré le théorème des moments. On lit sur le graphique qu'à la température $T_1 = 280$ K, à l'extrémité gauche du palier (point d'ébullition), $h_L = 210$ kJ · kg⁻¹ et à l'extrémité droite (point de rosée), $h_V = 425$ kJ · kg⁻¹. L'énoncé donne $h_E = 280$ kJ · kg⁻¹ donc $x_E = 0,326$ et de même $h_F = 400$ kJ · kg⁻¹ donc $x_F = 0,884$.

3. L'énergie utile pour un climatiseur est l'énergie thermique donnée par l'enceinte refroidie au fluide : ce transfert a lieu lorsque le fluide se vaporise, donc l'énergie utile est $q_{EF} = h_F - h_E = 120$ kJ · kg⁻¹. L'énergie coûteuse est le travail utile fourni pendant la phase de compression, soit $w_{u,FG} = h_G - h_F = 30$ kJ · kg⁻¹. L'efficacité du climatiseur est donc $\eta = \frac{q_{EF}}{w_{u,FG}} = 4,0$.
4. L'énergie thermique cédée par le fluide pendant sa liquéfaction est maintenant récupérée et on obtient une seconde énergie utile $-q_{GH} = h_G - h_H = 130$ kJ · kg⁻¹. L'efficacité de l'installation devient $\eta' = \frac{q_{EF} + (-q_{GH})}{w_{u,FG}} = 8,3$.