

Chapitre 5

Électrostatique

Exercice 1 **Compatibilité Coulomb-Maxwell**

L'espace est vide sauf au point O où se trouve la charge ponctuelle Q . On en déduit que

$$\forall M \neq O, \rho(M) = 0$$

Le champ électrique créé par la charge est donné par la loi de Coulomb ou par l'application du théorème de Gauss : pour tout point M défini par $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

La seule composante non nulle est donc E_r qui ne dépend que de la variable r . La divergence en coordonnées sphériques s'écrit

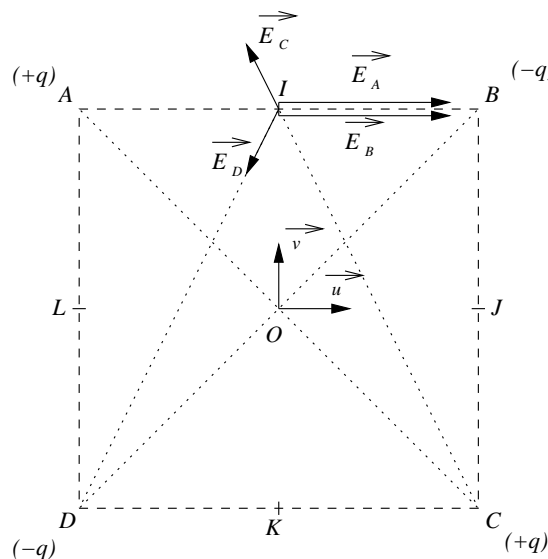
$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = 0$$

donc l'équation de Maxwell-Gauss est vérifiée. Le champ magnétique est nul et on vérifie en coordonnées sphériques que

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \vec{u}_\varphi = \vec{0}$$

Exercice 2 Superposition de champs

Définissons les points : I milieu de $[AB]$, J de $[BC]$, K de $[CD]$, L de $[DA]$. Notons (O, z) l'axe orthogonal au plan $(ABCD)$. Les plans $(ABCD)$, $(ACOz)$ et $(BDOz)$ sont plans de symétrie des charges. Le champ en O doit donc être contenu dans trois plans orthogonaux deux à deux, il est donc nul : $\vec{E}(O) = \vec{0}$. Le plans $(IKOz)$ est plan d'antisymétrie des charges. Le champ en I est donc orthogonal à $(IKOz)$. Construisons les quatre champs électriques qui s'y superposent sur la figure :



Posons $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{AB}$, $\vec{v} = \frac{\vec{DA}}{DA}$ et travaillons dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) : les coordonnées des points sont

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & C & D & I \\ \hline -a/2 & a/2 & a/2 & -a/2 & 0 \\ a/2 & a/2 & -a/2 & -a/2 & a/2 \end{array}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \vec{E}_A &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{AI}\|^2} \frac{\vec{AI}}{\|\vec{AI}\|} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u} \\ \vec{E}_B &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{BI}\|^2} \frac{\vec{BI}}{\|\vec{BI}\|} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u} \\ \vec{E}_C &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{CI}\|^2} \frac{\vec{CI}}{\|\vec{CI}\|} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \left[-\frac{1}{5\sqrt{5}} \vec{u} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \vec{v} \right] \\ \vec{E}_D &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{DI}\|^2} \frac{\vec{DI}}{\|\vec{DI}\|} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \left[-\frac{1}{5\sqrt{5}} \vec{u} - \frac{2}{5\sqrt{5}} \vec{v} \right] \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de superposition, le champ électrique est la somme de ces quatre champs :

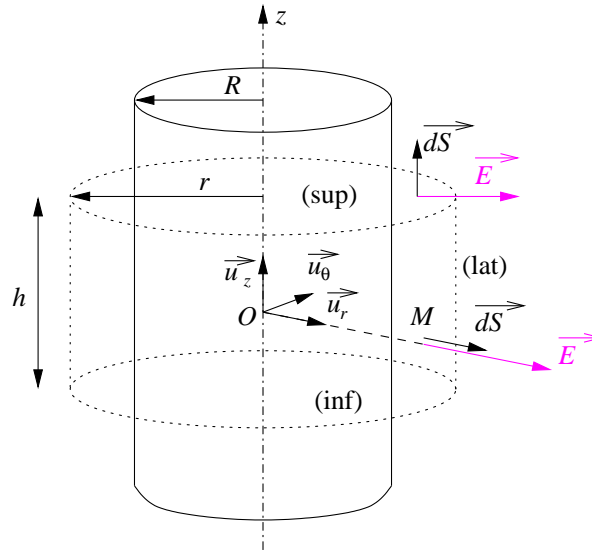
$$\vec{E}(I) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \left[2 - \frac{2}{5\sqrt{5}} \right] \vec{u}$$

Exercice 4 **Champ créé par un cylindre chargé en surface**

Les symétries et invariances sont les mêmes que celles du cours pour la distribution cylindrique volumique de charges et en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

Prenons pour surface de Gauss un cylindre de hauteur h arbitraire et de rayon r , dont la paroi latérale passe par M .



La surface de Gauss est formée

- d’une face supérieure (sup) sur laquelle $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ et $\vec{dS} = dS\vec{u}_z$,
- d’une face inférieure (inf) sur laquelle $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ et $\vec{dS} = -dS\vec{u}_z$,
- d’une face latérale (lat) sur laquelle $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ et $\vec{dS} = dS\vec{u}_r$.

Le flux du champ électrostatique à travers la surface de Gauss est donc

$$\iint_{\text{sup}} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{\text{inf}} E(r)\vec{u}_r \cdot (-dS\vec{u}_z) + \iint_{\text{lat}} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = E \cdot 2\pi rh$$

($2\pi rh$ est la surface latérale du cylindre). La charge intérieure dépend du cas considéré.

- Si $r < R$ alors la surface de Gauss ne contient aucune charge et $\vec{E} = \vec{0}$
- Si $r > R$ alors $Q_{\text{int}} = \sigma \cdot 2\pi Rh$ donc par application du théorème de Gauss

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{\sigma \cdot 2\pi Rh}{\varepsilon_0} \quad \text{donc} \quad \vec{E} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$$

On observe une discontinuité du champ à la traversée de la surface chargée :

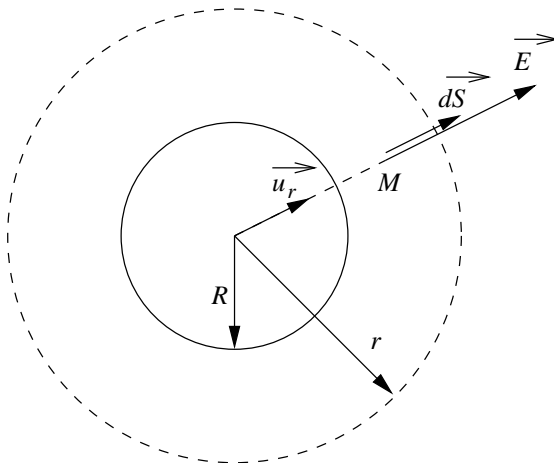
$$\vec{E}(R^+) - \vec{E}(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

Exercice 5 **Champ créé par une sphère chargée en surface**

Les symétries et invariances sont les mêmes que celles du cours pour la distribution sphérique volumique de charges et en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

Prenons pour surface de Gauss une sphère de rayon r passant par M .



Le flux du champ électrostatique à travers la surface de Gauss est donc

$$\oiint E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = 4\pi r^2 E(r)$$

La charge intérieure dépend du cas considéré.

- Si $r < R$ alors la surface de Gauss ne contient aucune charge et $\vec{E} = \vec{0}$
- Si $r > R$ alors $Q_{\text{int}} = \sigma \cdot 4\pi R^2$ donc par application du théorème de Gauss

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \quad \text{donc} \quad \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

On observe une discontinuité du champ à la traversée de la surface chargée :

$$\vec{E}(R^+) - \vec{E}(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

Exercice 6 **Champ créé par une distribution exponentielle de charges**

1. La charge totale située entre les plans $z = 0$ et $z = h$ est

$$q = \iiint \rho d\tau = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \rho_0 e^{-\frac{r}{r_0}} r dr d\theta dz$$

$$\text{soit } q = \rho_0 \int_{r=0}^{+\infty} r e^{-\frac{r}{r_0}} dr \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^h dz$$

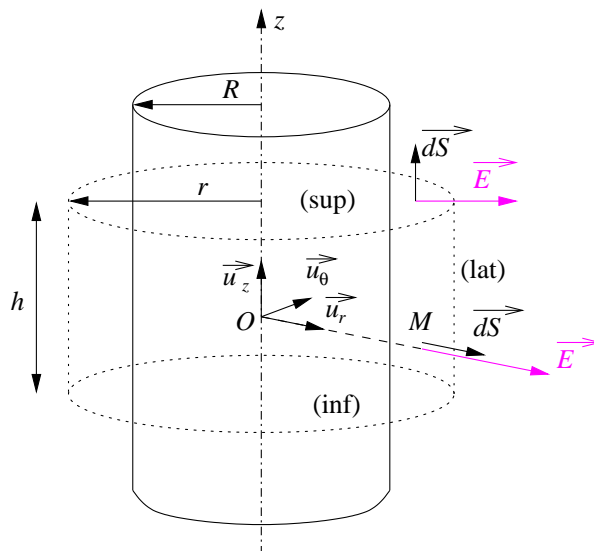
La première intégrale se calcule grâce à une intégration par parties. En posant $u' = e^{-\frac{r}{r_0}}$ et $v = r$, il vient $u = -r_0 e^{-\frac{r}{r_0}}$ et $v' = 1$ donc

$$\int r e^{-\frac{r}{r_0}} dr = \left[-r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} \right] + r_0 \int e^{-\frac{r}{r_0}} dr = \left[-r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} \right]$$

On en déduit que

$$q = \rho_0 \left[-r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} \right]_0^{+\infty} \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [z]_0^h = 2\pi h \rho_0 r_0^2$$

2. Les symétries et invariances sont celles de la distribution cylindrique du cours et $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Prenons pour surface de Gauss un cylindre de hauteur h arbitraire et de rayon r_0 , dont la paroi latérale passe par M .



La surface de Gauss est formée

- d'une face supérieure (sup) sur laquelle $\vec{E} = E(r_0)\vec{u}_r$ et $\vec{dS} = dS\vec{u}_z$,
- d'une face inférieure (inf) sur laquelle $\vec{E} = E(r_0)\vec{u}_r$ et $\vec{dS} = -dS\vec{u}_z$,
- d'une face latérale (lat) sur laquelle $\vec{E} = E(r_0)\vec{u}_r$ et $\vec{dS} = dS\vec{u}_r$.

Le flux du champ électrostatique à travers la surface de Gauss est donc

$$\iint_{\text{sup}} E(r_0)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{\text{inf}} E(r_0)\vec{u}_r \cdot (-dS\vec{u}_z) + \iint_{\text{lat}} E(r_0)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = E \cdot 2\pi r_0 h$$

($2\pi r_0 h$ est la surface latérale du cylindre). La charge intérieure est celle située entre $z = 0$ et $z = h$ et entre $r = 0$ et $r = r_0$:

$$Q_{\text{int}} = \int_{r=0}^{r_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \rho_0 e^{-\frac{r}{r_0}} r dr d\theta dz$$

$$\text{soit } Q_{\text{int}} = \rho_0 \left[-r_0 r e^{-\frac{r}{r_0}} - r_0^2 e^{-\frac{r}{r_0}} \right]_0^{r_0} \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [z]_0^h = 2\pi h \rho_0 r_0^2 [1 - 2e^{-1}]$$

Le théorème de Gauss donne donc

$$E \cdot 2\pi r_0 h = \frac{2\pi h \rho_0 r_0^2}{\varepsilon_0} [1 - 2e^{-1}]$$

$$\text{soit } \vec{E}(r_0) = \frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0} [1 - 2e^{-1}] \vec{u}_r$$

Exercice 7 **Champ de « pesanteur » créé par la Terre**

1. Par définition de la masse volumique :

$$\rho = \frac{m_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

2. Les symétries et invariances sont celles de la sphère, donc $\vec{g} = -g(r)\vec{u}_r$. Prenons pour surface de Gauss la sphère de rayon r passant par M . Le flux de \vec{g} à travers cette sphère est

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint -g(r)dS = -4\pi r^2 g(r)$$

La masse intérieure dépend de la valeur de r .

- Si $r < R_T$, la masse intérieure est celle remplissant la sphère de rayon r , soit $M_{\text{int}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$.
Le théorème de Gauss gravitationnel s'écrit donc

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}} \quad \text{soit} \quad -4\pi r^2 g(r) = -4\pi \mathcal{G} \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

donc $\vec{g}(r < R_T) = -\frac{\mathcal{G} m_T r}{R_T^3} \vec{u}_r$.

- Si $r \leq R_T$, la masse intérieure est celle de la Terre soit $M_{\text{int}} = m_T$. Le théorème de Gauss gravitationnel s'écrit donc

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} m_T \quad \text{soit} \quad -4\pi r^2 g(r) = -4\pi \mathcal{G} m_T$$

donc $\vec{g}(r \geq R_T) = -\frac{\mathcal{G} m_T}{r^2} \vec{u}_r$.

3. La fonction $g(r)$ est continue avec $g(R_T) = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \simeq g_0$.

4. On fait le développement limité :

$$g(z) = -\frac{\mathcal{G} m_T}{(R_T + z)^2} = -\frac{\mathcal{G} m_T}{R_T^2} \left[1 + \frac{z}{R_T} \right]^{-2} \simeq g_0 \left[1 - \frac{2z}{R_T} \right]$$

5. Pour $r < R_T$:

$$\frac{dEp}{dr} = -mg(r) = \frac{\mathcal{G} m_T r}{R_T^3} \quad \text{donc} \quad Ep(r) = \frac{\mathcal{G} m_T r^2}{2R_T^3}$$

en prenant la référence en $r = 0$.

6. Écrivons la conservation de l'énergie mécanique entre $t = 0$ ($x(0) = R_T$ et $\dot{x}(0) = 0$) et t ($x(t) = \pm r(t)$, $\dot{x}(t) = v(t)$) :

$$\frac{\mathcal{G} m_T}{2R_T} + 0 = \frac{\mathcal{G} m_T x^2}{2R_T^3} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

En dérivant par rapport au temps, on en déduit

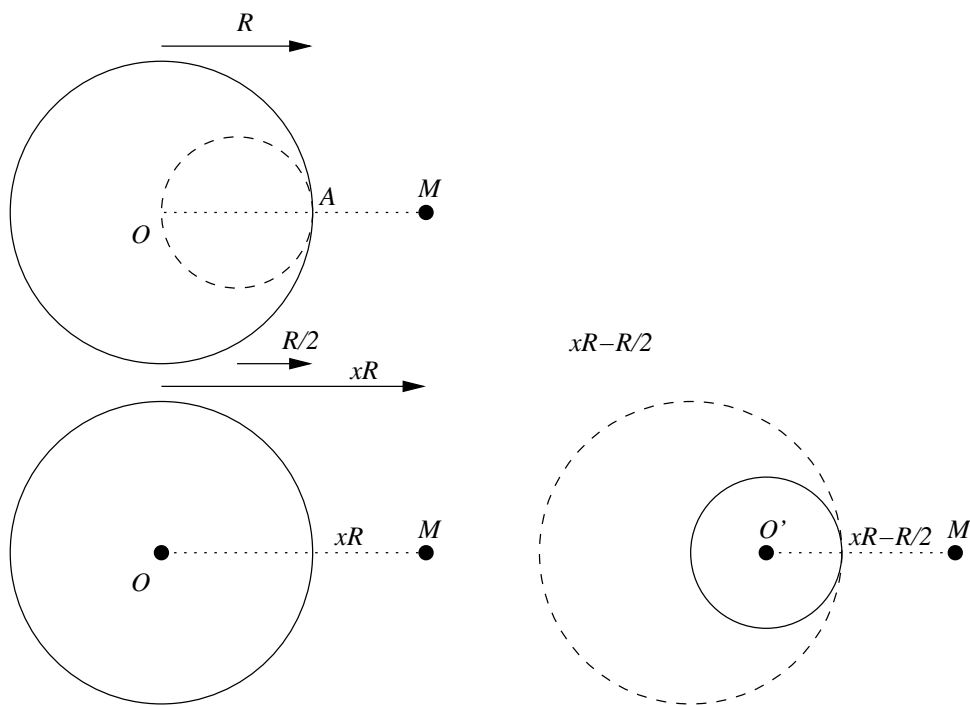
$$0 = \frac{2\mathcal{G} m_T \dot{x}x}{2R_T^3} + \frac{1}{2} m \ddot{x} \dot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{\mathcal{G} m_T}{R_T^3} x = 0$$

Cette équation est du type oscillateur harmonique, sa solution est $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0^2 = \frac{\mathcal{G} m_T}{R_T^3}$; x est donc une fonction périodique du temps de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Le mobile fait donc des aller-retours entre N et S, la durée du voyage est donc la demi-période :

$$\Delta t = \frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{\frac{R_T^3}{\mathcal{G} m_T}} = 2535 \text{ s}$$

Exercice 8 Planète creusée

Par application du théorème de superposition, le champ créé par la planète creusée est la différence entre le champ créé par la planète si elle était pleine moins celui créé par la planète de rayon $R/2$ s'inscrivant exactement dans la cavité. Les notations sont celles du schéma suivant :



D'après le cours, le champ créé par une planète sphérique de masse m_P en un point extérieur à la planète à la distance r de son centre est

$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}m_P}{r^2}\vec{u}_r$$

On en déduit le champ en M $\vec{g}(M) = g(M)\vec{u}$ avec :

$$g(M) = -\frac{\mathcal{G}M}{(xR)^2} + \frac{\mathcal{G}M/8}{(xR - R/2)^2} = -\frac{\mathcal{G}M}{R^2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8(x - 1/2)^2} \right)$$

Exercice 9 **Application numérique pour un satellite artificiel**

La période T permet de calculer le demi-grand axe a grâce à la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T} \quad \text{donc} \quad a = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}m_T T^2}{4\pi^2}} = 7,013 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Le grand axe est la somme des rayons de l'apogée et du périégée :

$$2a = r_P + r_A = R_T + z_P + R_T + z_A \quad \text{donc} \quad z_A = 2a - 2R_T - z_P = 916 \text{ km}$$

Le système suivant permet de calculer l'excentricité :

$$\begin{cases} r_P = \frac{p}{1+e} \\ r_A = \frac{p}{1-e} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{1+e}{1-e} = \frac{r_A}{r_P} \quad \text{et} \quad e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} = \frac{z_A - z_P}{2a} = 0,040$$

Par application de la formule du cours :

$$Em = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{2a} = -4,27 \text{ GJ}$$

Exercice 10 **La comète 67P/Tchouriounov-Guerassimenko**

1. La troisième loi de Kepler permet de calculer la période T à partir du demi-grand axe $a = \frac{r_P + r_A}{2}$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T} \quad \text{donc} \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T \left(\frac{r_P + r_A}{2}\right)^3}} = 202,8 \cdot 10^6 \text{ s}$$

soient environ 6 ans et demi. Le système suivant permet de calculer l'excentricité :

$$\begin{cases} r_P = \frac{p}{1+e} \\ r_A = \frac{p}{1-e} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{1+e}{1-e} = \frac{r_A}{r_P} \quad \text{et} \quad e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} = 0,641$$

2. La comète n'est pas sphérique et les lois de Kepler ne sont donc pas parfaitement vérifiées ; de plus, la comète fond partiellement à chaque passage à proximité du Soleil donc ce n'est pas un système solide.
3. Par définition de la masse volumique :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{donc} \quad m = \rho V \simeq 450 \cdot (4100 \times 3200 \times 1300 + 2500 \times 2500 \times 2000) \simeq 10^{13} \text{ kg}$$

4. L'expression obtenue pour un astre sphérique de rayon R et de masse M donne une valeur approchée de g , en prenant $M = m$ et $R \simeq 2\,500 \text{ m}$:

$$g \simeq \frac{\mathcal{G}M}{R^2} \simeq 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Exercice 11 **Ellipse de transfert**

1. On voit sur la figure que le point de départ P correspond au périhélie, le point d'arrivée A à l'apogée. On a donc $2a = r_1 + r_2$. On en déduit l'énergie mécanique par application de la formule de cours et par conservation de cette énergie :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{2a} = \frac{1}{2}mv_1'^2 - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2'^2 - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r_2}$$

$$\text{donc } v_1' = \sqrt{2\mathcal{G}m_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} \quad \text{et} \quad v_2' = \sqrt{2\mathcal{G}m_T \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

2. Par application de la troisième loi de Kepler :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{\mathcal{G}m_T}}$$

et la durée du transfert est égale à la moitié de cette période soit

$$\delta t = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{\mathcal{G}m_T}}$$

Exercice 12 Force centrale élastique

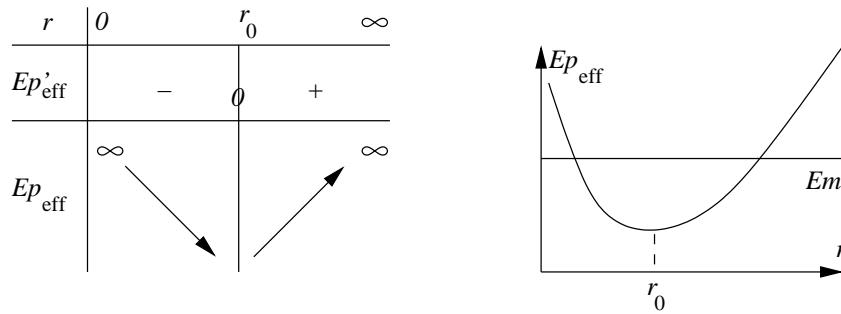
1. La formule donnée par le cours, avec l'expression de l'énergie potentielle élastique pour un ressort de constante de raideur k , de longueur $\ell = r$ et de longueur à vide $\ell_0 = 0$, donne :

$$Ep_{\text{eff}} = \frac{L_O^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

2. La dérivée par rapport à r est :

$$Ep'_{\text{eff}} = -\frac{L_O^2}{mr^3} + kr = \frac{k}{r^3} \left[r^4 - \frac{L_O^2}{km} \right]$$

Elle s'annule pour $r_0 = \sqrt[4]{\frac{L_O^2}{km}}$, on en déduit le tableau de variations et la courbe représentative :



L'expression de l'énergie potentielle effective minimale est

$$E_0 = Ep_{\text{eff}} \left(r = \sqrt[4]{\frac{L_O^2}{km}} \right) = L_O \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. Quelle que soit la valeur de Em (supérieure à E_0), l'ensemble des solutions de l'inéquation $Ep_{\text{eff}}(r) \leq Em$ est un intervalle $[r_{\min}, r_{\max}]$. Le mouvement est lié, la trajectoire est donc comprise entre deux cercles de rayons r_{\min} et r_{\max} , et peut être une ellipse ou toute autre courbe.
4. Le mouvement est circulaire si $r_{\min} = r_{\max}$ donc si $r = r_0 = \sqrt[4]{\frac{L_O^2}{km}}$. Par définition du moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{v}_0 \quad \text{donc} \quad L_O = mr_0 v_0$$

On en déduit que

$$r_0^4 = \frac{L_O^2}{km} = \frac{m^2 r_0^2 v_0^2}{km} \quad \text{donc} \quad v_0 = r_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le rayon est constant et le moment cinétique l'est aussi car c'est un mouvement à force centrale. On en déduit que la vitesse est constante et le mouvement est donc circulaire et uniforme. On calcule enfin

$$\omega = \frac{v_0}{r_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Exercice 13 **Association de condensateurs**

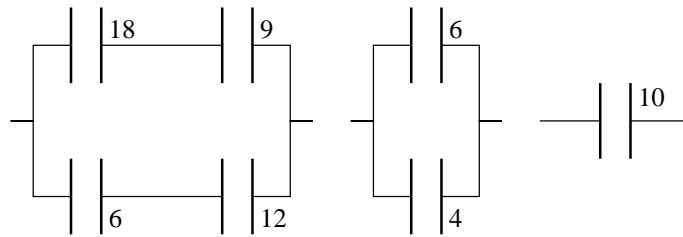
Quand deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 sont en parallèle, leur admittance complexe est

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = jC_1\omega + jC_2\omega = j(C_1 + C_2)\omega$$

donc ils sont équivalents à un condensateur de capacité équivalente $C_{eq} = C_1 + C_2$. S'ils sont branchés en série, alors

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega} = \frac{C_1 + C_2}{jC_1C_2\omega} = \frac{1}{j\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\omega}$$

donc ils sont équivalents à un condensateur de capacité équivalente $C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$. On peut donc simplifier le circuit. Sur les schémas suivants, toutes les valeurs numériques sont les capacités équivalentes exprimées en microFarad (μF).



donc $C_{eq} = 10 \mu\text{F}$).

Exercice 14 **Électromètre**

1. D'après la formule du cours, la capacité du condensateur est $C = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$ et l'énergie électrique du condensateur est donc

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{x} U^2$$

2. La relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}$ s'écrit

$$\vec{F} = -\frac{d\mathcal{E}}{dx} \vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0 S}{2x^2} U^2 \vec{u}_x$$

3. La loi du moment cinétique appliqué au balancier en rotation autour de l'axe s'écrit :

$$\mathcal{M}(\vec{F}) + \mathcal{M}(\vec{P}) = 0 \quad \text{soit} \quad aF - amg = 0 \quad \text{soit} \quad F = mg$$

$$\text{donc} \quad \frac{\varepsilon_0 S}{2x^2} U^2 = mg \quad \text{et} \quad U = x \sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 S}}$$

Exercice 15 **Condensateur sphérique**

Les symétries et invariances donnent $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$. On choisit comme boîte de Gauss une sphère de rayon r . Le flux vaut

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

- Si $r < r_1$, $Q_{int} = 0$ donc $\vec{E}(r) = \vec{0}$.
- Si $r \in [r_1, r_2]$, $Q_{int} = \sigma_1 \cdot 4\pi r_1^2 = -q$ donc $\vec{E}(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$.
- Si $r > r_2$, $Q_{int} = 0$ donc $\vec{E}(r) = \vec{0}$.

La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ donne, en coordonnées sphériques

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$$

et la condition aux limites $V(r_1) = 0$ (masse) donne

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right]$$

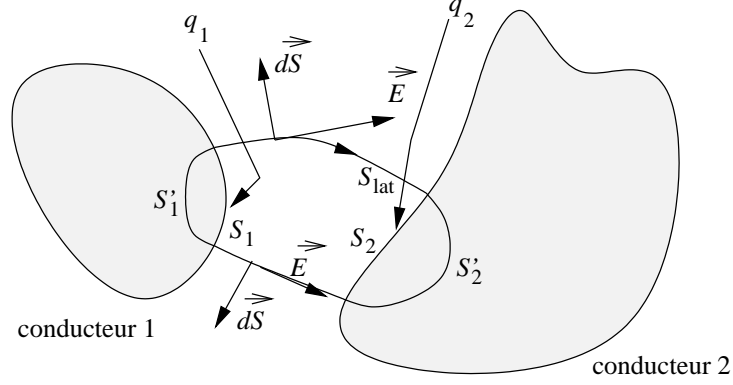
On en déduit la tension aux bornes du condensateur

$$U = V(r_2) - V(r_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \quad \text{soit} \quad q = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1} U$$

La capacité du condensateur ($q = CU$) vaut donc $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$.

Exercice 16 **Théorème des éléments correspondants**

Considérons la surface de Gauss formée de la réunion du tube de champ, de sa fermeture S'_1 à l'intérieur du conducteur 1 et de sa fermeture S'_2 à l'intérieur du conducteur 2 :



Le théorème de Gauss s'écrit

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\text{soit } \iint_{S'_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S'_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

Or S'_1 est situé à l'intérieur du conducteur 1 donc $\vec{E} = 0$ et S'_2 est situé à l'intérieur du conducteur 2 donc $\vec{E} = 0$; la surface latérale est le tube de champ donc en tout point \vec{E} lui est tangent, alors que \vec{dS} lui est normal, donc le produit scalaire est nul. On en déduit que

$$0 + 0 + 0 = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} \quad \text{donc} \quad q_1 + q_2 = 0$$

Exercice 17

Analyse graphique des surfaces équipotentielles
--

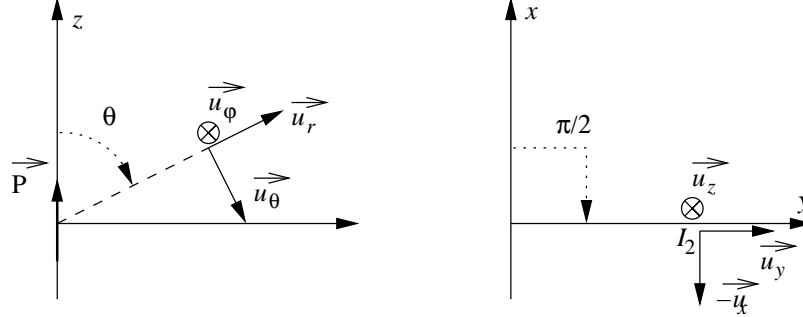
Entre le sol et la base du nuage, le champ électrique est de l'ordre de

$$E \simeq \frac{5 \cdot 10^6}{300} = 17 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1} > 15 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$$

La distance minimale entre le « sol » et le nuage est celle entre le haut de l'arbre et le nuage. De plus, on observe le resserrement des surfaces équipotentielles au voisinage de la cime de l'arbre, qui traduit un champ électrique très fort à cet endroit. Enfin, l'arbre forme un canal privilégié pour le déplacement des charges, et l'éclair l'empruntera vraisemblablement. *Les séquoias sont réputés pour leur destin habituel d'arbres foudroyés : d'une part ils atteignent des hauteurs très importantes, d'autre part c'est un bois très irrigué avec une sève très conductrice de l'électricité ; paradoxalement, lorsqu'un séquoia est foudroyé, il semble que cela favorise la dispersion et la germination des graines qui, sans cela, peuvent rester prisonnières des pommes qui mettent parfois vingt ans à tomber !*

Exercice 18 **Dipôles**

1. Il faut adapter les notations du cours à celles du dispositif. Dessinons côte-à-côte la base sphérique utilisée pour le champ dipolaire et le schéma de l'énoncé retourné.



On voit donc que $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}_r = \vec{u}_y$, $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x$ et $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_z$. On utilise le résultat du cours donnant le champ électrique créé par le dipôle 1 en I_2 dans l'approximation dipolaire :

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{2P \cos \frac{\pi}{2}}{4\pi\epsilon_0 r^3} & \text{selon } \vec{u}_r = \vec{u}_y \\ \frac{P \sin \frac{\pi}{2}}{4\pi\epsilon_0 r^3} & \text{selon } \vec{u}_\theta = -\vec{u}_x \\ 0 & \text{selon } \vec{u}_\varphi = \vec{u}_z \end{cases} \quad \text{soit} \quad \vec{E}_2 = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_x$$

2. Dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\vec{P}_2 \begin{vmatrix} P \cos \alpha \\ P \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{donc} \quad Ep_{2-1} = -\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_2 = \frac{P^2 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_O = \frac{P^2 \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_z$$

3. Notons $E_0 = \frac{P^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. Il vient

$$Ep = E_0 \cos \alpha \quad \text{donc} \quad \frac{dEp}{d\alpha} = -E_0 \sin \alpha \quad \text{et} \quad \frac{d^2 Ep}{d\alpha^2} = -E_0 \cos \alpha$$

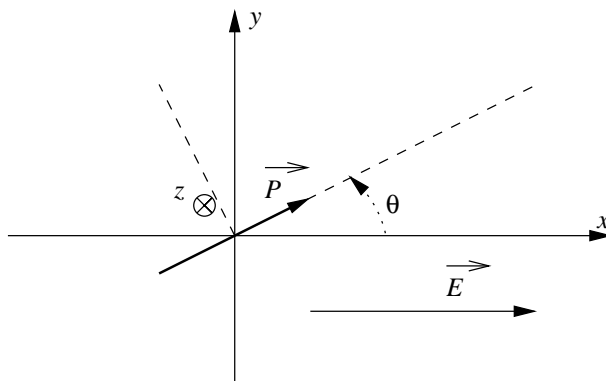
Les positions d'équilibre sont définies par $\frac{dEp}{d\alpha} = 0$ donc $\sin \alpha = 0$ donc $\alpha = 0$ ou π . Il y a stabilité si $\frac{d^2 Ep}{d\alpha^2} > 0$. Or

$$\frac{d^2 Ep}{d\alpha^2}(\alpha = 0) = -E_0 < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 Ep}{d\alpha^2}(\alpha = \pi) = E_0 > 0$$

donc $\alpha = \pi$ est la seule position d'équilibre stable : on retrouve que \vec{P}_2 s'oriente dans la direction et dans le sens du champ \vec{E}_2 créé par \vec{P}_1 , selon $-\vec{u}_x$.

Exercice 19 Oscillations d'un dipôle

1. Les notations sont celles du schéma suivant :



Le couple des forces électriques subies par le dipôle est

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E} = -PE \sin \theta \vec{u}_z$$

La loi du moment cinétique en projection sur l'axe $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ s'écrit

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = \frac{dL_{\Delta}}{dt} \quad \text{soit} \quad -PE \sin \theta = J\ddot{\theta} \quad \text{soit} \quad J\ddot{\theta} + PE \sin \theta = 0$$

2. L'énergie potentielle d'interaction entre le champ et le dipôle est

$$Ep = -\vec{P} \cdot \vec{E} = -PE \cos \theta \quad \text{donc} \quad \frac{dEp}{d\theta} = PE \sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{d^2Ep}{d\theta^2} = PE \cos \theta$$

Les positions d'équilibre sont celles pour lesquelles $\frac{dEp}{d\theta} = 0$ soit $\theta = 0$ ou π . Or

$$\frac{d^2Ep}{d\theta^2}(\theta = 0) = PE > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2Ep}{d\theta^2}(\theta = \pi) = -PE < 0$$

donc $\theta = 0$ est stable et $\theta = \pi$ instable.

3. Dans l'hypothèse des petits angles, $\sin \theta \simeq \theta$ et l'équation différentielle s'écrit donc

$$\ddot{\theta} + \frac{PE}{J}\theta = 0 \quad \text{donc} \quad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{PE}{J}}$$

4. L'énergie cinétique du dipôle est celle d'un solide en rotation :

$$Ec = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2\theta_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}PE\theta_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

Dans l'hypothèse des petits angles, $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ donc

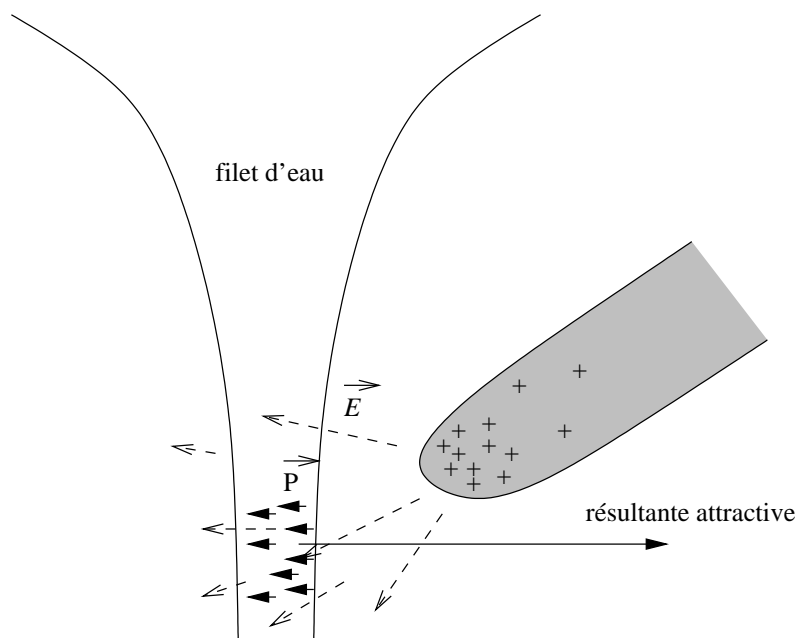
$$Ep = -PE \cos \theta \simeq -PE + \frac{1}{2}PE\theta_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

On en déduit que

$$Em = Ec + Ep = PE \left[-1 + \frac{1}{2}\theta_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\theta_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \right] = PE \left[\frac{\theta_0^2}{2} - 1 \right]$$

Exercice 20 **Caractère polaire de la molécule d'eau**

Les molécules d'eau, assimilées à des dipôles électriques (l'atome d'oxygène est plus électronégatif que les atomes d'hydrogène) sont soumises à l'action du champ électrique non uniforme créé par la tige chargée.



D'après le cours, les dipôles s'orientent dans le sens de \vec{E} et se déplacent vers les zones de champ maximum, donc vers la tige, d'où le déplacement attractif du filet d'eau. Les molécules de cyclohexane ne sont, elles, pas polaires (et très faiblement polarisables), il n'y a donc pas de déviation.