Chapitre 7

Propagation et rayonnement

Exercice 1 **Superposition de deux ondes électriques harmoniques**

1. Par application de la loi des nœuds : $i(x,t) = i(x+dx,t) + C\frac{\partial u}{\partial t}$ Par application de la loi des mailles : $u(x,t) = L\frac{\partial i}{\partial t} + u(x+dx,t)$. En effectuant un développement limité à l'ordre 1 :

$$\left\{\begin{array}{l} i(x+dx,t) \simeq i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial t} \cdot dx \\ u(x+dx,t) \simeq u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dx \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \end{array}\right.$$

2. On dérive la première équation par rapport à t et la deuxième par rapport à x et on élimine i grâce au théorème de Schwartz ($\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$) d'où $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. On en déduit l'équation de d'Alembert avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c_0 = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{ s}^{-1}$$

qui est la célérité de la lumière dans le vide.

3. L'onde de tension est

$$u(x,t) = u\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = U_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$$

4. L'onde de tension est

$$u(x,t) = u\left(L, t - \frac{L-x}{c}\right) = -U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c} x - \frac{\omega}{c} L\right)$$

5. Il faut que

$$\left\{\begin{array}{l} U_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} L\right) = -U_0 \cos(\omega t) \\ -U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c} 0 - \frac{\omega}{c} L\right) = U_0 \cos(\omega t) \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \frac{\omega}{c} L = n \cdot 2\pi, \ n \text{ entier}$$

et pour $n = 1$, $L_{\min} = 2\pi \frac{c}{\omega} = 300$ km.

Exercice 2 $\boxed{\textbf{Caractéristiques numériques d'une onde électromagnétique}}$

On a $\overrightarrow{B} = \frac{1}{c_0}\overrightarrow{u}_x \wedge \overrightarrow{E}$ donc $\overrightarrow{B}_0 = B_0\overrightarrow{u}_z$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c_0} = 3,3 \cdot 10^{-7}$ T. Par définition, $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 630$ nm et $\sigma = \frac{1}{\lambda} = 1,6 \cdot 10^6$ m^{-1}. La relation de dispersion donne $\omega = kc_0 = 3,0 \cdot 10^{15}$ rad $\cdot$ s^{-1}. Par définition : $f = \frac{\omega}{2\pi} = 4,8 \cdot 10^{14}$ Hz et $T = \frac{1}{f} = 2,1 \cdot 10^{-15}$ s.

Exercice 3 $\boxed{\textbf{Polariseurs successifs}}$

$I_1 = \frac{I_0}{2}$ est donné par l'énoncé. D'après la loi de Malus, $I_2 = I_1 \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} I_1 = \frac{I_0}{8}$. La lumière émergente du deuxième polariseur est polarisée selon $\vec{u}_2$. Pour appliquer à nouveau la loi de Malus, il faut donc bien penser à considérer l'angle entre $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$:

$$I_3 = I_2 \cos^2(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = \frac{I_0}{8} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{I_0}{8} \cdot \frac{3}{4}$$

soit $I_3 = \frac{3I_0}{32}$. Si on place 3 immédiatement après 2, les axes du 1 et du 3 étant orthogonaux, il y a extinction complète, qui perdure après le polariseur 2. L'ordre des polariseurs est donc important.

Exercice 4 $\boxed{\textbf{Application numérique pour un faisceau laser}}$

La valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting est $< \Pi >= \frac{\mathcal{P}}{S} = 2,50 \cdot 10^6\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.

$$< \Pi >= \frac{\varepsilon_0 c_0 E_0^2}{2} \quad \text{donc} \quad E_0 = \sqrt{\frac{2 < \Pi >}{\varepsilon_0 c_0}} = 43,4\ \mathrm{kV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

Enfin $B_0 = \frac{E_0}{c_0} = 1,44 \cdot 10^{-4}$ T. On a $\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$ donc $f = \frac{c_0}{\lambda_0} = 4,8 \cdot 10^{14}$ Hz ; $\omega = 2\pi f = 3,0 \cdot 10^{15}\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$; $k = \frac{\omega}{c_0} = 9,94 \cdot 10^6\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

Exercice 5 $\boxed{\textbf{Modèle photonique}}$

1. La relation de structure entraîne $\vec{B} = \frac{k\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c_0}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$.
2. $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 c_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)\vec{u}_x$ don $< \vec{\Pi} >= \frac{\varepsilon_0 c_0 E_0^2}{2}\vec{u}_x$. $< d\mathcal{P} >=< \vec{\Pi} > \cdot dS\vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0 c_0 E_0^2 dS}{2}$. Les photons qui frappent la surface pendant dt sont ceux situés à une distance inférieure ou égale à $c_0 dt$, ils sont donc situés dans un cylindre de base dS et de hauteur $c_0 dt$; il y en a donc $dN = n_0 dS c_0 dt$. Leur énergie est $d\mathcal{E} = dN \cdot h\nu$, la puissance est donc $d\mathcal{P} = n_0 dS c_0 h\nu$. Par identification :
$$\frac{\varepsilon_0 c_0 E_0^2 dS}{2} = n_0 dS c_0 h\nu \quad \text{donc} \quad n_0 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2h\nu}$$
3. $u_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \varepsilon_0 E^2$, de valeur moyenne $< u_{em} >= \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2$. Il y a n_0 photons par mètre cube donc $< u_{em} >= n_0 h\nu$. Par identification :
$$\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2 = n_0 h\nu \quad \text{donc} \quad n_0 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2h\nu}$$
4. En reprenant comme à la question 2, chaque photon qui rebondit sur la surface a une variation de quantité de mouvement
$$\delta\vec{p} = \left[-\frac{h\nu}{c_0}\vec{u}_x\right] - \left[\frac{h\nu}{c_0}\vec{u}_x\right] = -2\frac{h\nu}{c_0}\vec{u}_x$$
Pendant dt, la variation de quantité de mouvement des photons est donc
$$d\vec{p} = dN\delta\vec{p} = -2n_0 dS c_0 dt \frac{h\nu}{c_0}\vec{u}_x = -2n_0 dS dt h\nu \vec{u}_x$$
La loi de la quantité de mouvement donne donc la force exercée par la paroi sur les photons :
$$\vec{f}_{\text{paroi}\to\text{photons}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -2n_0 dS h\nu\vec{u}_x \quad \text{donc} \quad \vec{f}_{\text{photons}\to\text{paroi}} = 2n_0 dS h\nu \vec{u}_x$$
La pression subie par la paroi est donc
$$P = \frac{f}{dS} = 2n_0 h\nu = \varepsilon_0 E_0^2$$

Exercice 6 $\boxed{\textbf{Calcul d'une pulsation plasma}}$

Calculons n_0. La loi des gaz parfaits donne

$$PV = nRT = \frac{N}{\mathcal{N}_A}RT \quad \text{donc} \quad n_0 = \frac{N}{V} = \frac{P\mathcal{N}_A}{RT} = 7,33 \cdot 10^{24}\ \mathrm{m}^{-3}$$

Par application de la formule du cours :

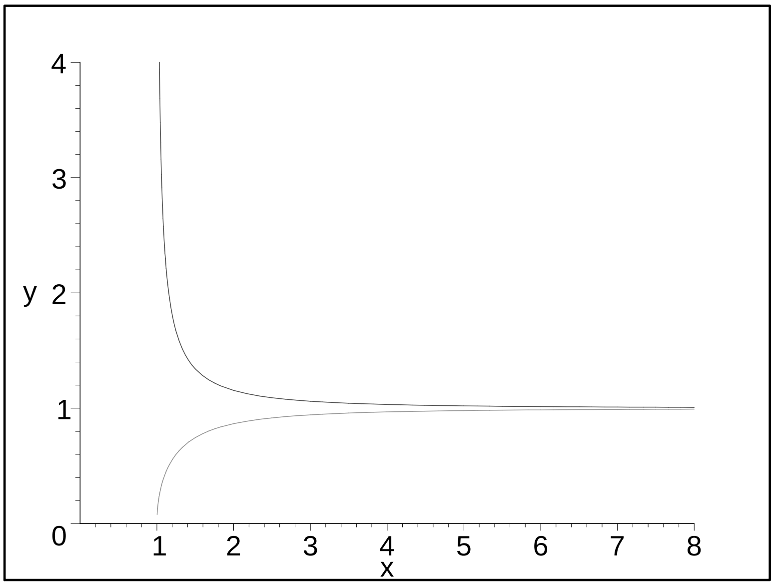
$$\omega_P\sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} = 1,53 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

Pour $\omega = \frac{\omega_P}{2}$, l'onde ne se propage pas dans le plasma et elle pénètre sur une épaisseur de l'ordre de

$$\delta = \frac{c_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_P^2}}} = \frac{4c_0}{\omega_P\sqrt{3}} = 4,53 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

Exercice 7 $\boxed{\textbf{Variations de } v_\varphi \textbf{ et } v_g \textbf{ avec } \omega}$

L'étude des deux fonctions ne pose pas de difficulté. Elles sont définies pour $\omega > \omega_P$, v_φ est strictement décroissante de $+\infty$ à c_0, v_g est strictement croissante de 0 à c_0.



L'inéquation s'écrit :

$$v_g > 0,99c_0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} > 0,99 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_P} = \sqrt{\frac{1}{1 - 0,99^2}} = 7,1$$

Exercice 8 $\boxed{\textbf{Étalement d'un groupe de randonneurs}}$

Le premier randonneur arrive à la date t_f telle que $v_M t_f = 12\ 000$ soit $t_f = 2\ 182$ s. À cette date, le dernier, a parcouru $v_m t_f = 9\ 819$ m, mais comme il est parti 200 mètres derrière le premier, il se trouve à l'abscisse 9 619 m, donc $\Delta x = 12\ 000 - 9\ 619 = 2\ 381$ m derrière le premier : le paquet de randonneurs s'est effectivement étalé car sa longueur a augmenté d'un facteur supérieur à 10.

Exercice 9 $\boxed{\textbf{Étude de l'ionosphère}}$

1. La pulsation plasma vaut

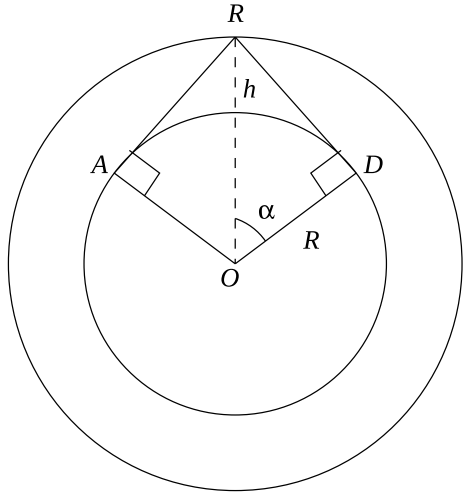
$$\omega_P \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} = 56,3 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Celle des grandes ondes est $\omega_{GO} = 0,63 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} < \omega_P$, celle des ondes FM $\omega_{GO} = 630 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} > \omega_P$. Les GO ne se propagent pas, les ondes FM se propagent dans l'ionosphère.

2. La rotondité de la Terre interdit une transmission directe. On a $\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$ donc

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} = 0,509 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} < \omega_P$$

donc l'onde peut se réfléchir sur l'ionosphère. Considérons une onde émise en D à la surface de la Terre, se réfléchissant en R sur la base de l'ionosphère et reçue en A :



On peut écrire

$$\cos\alpha = \frac{OD}{OR} = \frac{R}{R+h} = \frac{6400}{6475} \quad \text{donc} \quad \alpha = 0,153 \text{ rad}$$

La distance maximale entre D et A est donc

$$\overset{\frown}{DA} = 2\alpha \cdot R_T = 1950 \text{ km}$$

Cette valeur est un peu inférieure aux 3200 kilomètres de l'énoncé. On peut considérer que l'ionosphère est beaucoup plus dense dans sa partie haute (aux alentours de 250 kilomètres d'altitude) que dans sa partie basse, et que la réflexion se fait vers 200 kilomètres d'altitude. On obtient alors

$$\cos\alpha' = \frac{6400}{6600} \quad \text{donc} \quad \alpha' = 0,247 \text{ rad} \quad \text{et} \quad \overset{\frown}{DA'} = 2\alpha' \cdot R_T = 3160 \text{ km}$$

qui est très proche de la valeur de l'énoncé.

Exercice 10 $\boxed{\textbf{Vitesse de phase, vitesse de groupe dans un métal}}$
La relation de dispersion s'écrit

$$k' = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$$

On en déduit la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \omega \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}}$$

et la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}}{\frac{\mu_0 \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{8\omega}{\mu_0 \gamma}}$$

On a donc $v_g = 2 v_\varphi$.

Exercice 11 $\boxed{\textbf{Effet Joule dans un conducteur ohmique}}$

1. L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}E_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\cos(\omega t-\frac{z}{\delta})\\ 0\\ 0\end{array}\right. = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{donc}\quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = E_0 \vec{u}_y \left[\frac{1}{\delta}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos(\omega t-\frac{z}{\delta}) - \frac{1}{\delta}e^{-\frac{z}{\delta}}\sin(\omega t-\frac{z}{\delta})\right]$$

$$\text{donc}\quad \vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta}e^{-\frac{z}{\delta}}\vec{u}_y\left[\sin(\omega t-\frac{z}{\delta})+\cos(\omega t-\frac{z}{\delta})\right]$$

soit $B(z,t) = \frac{E_0\sqrt{2}}{\omega\delta}\sin\left(\omega t-\frac{z}{\delta}+\frac{\pi}{4}\right)$.

2. En utilisant la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$:

$$p_J(z,t) = \gamma E_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}}\cos^2(\omega t-\frac{z}{\delta})$$

donc $< p_J > (z) = \frac{\gamma E_0^2}{2}e^{-\frac{2z}{\delta}}$.

3. En intégrant :

$$< \mathcal{P} >= \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{+\infty}\frac{\gamma E_0^2}{2}e^{-\frac{2z}{\delta}}dxdydz = a^2\gamma\frac{E_0^2}{2}\left[\frac{e^{-\frac{2z}{\delta}}}{-\frac{2}{\delta}}\right]_0^{+\infty}$$

soit $< \mathcal{P} >= \frac{a^2\gamma\delta E_0^2}{4}$.

Exercice 12 $\boxed{\textbf{Réflexion sous incidence oblique}}$

1. Exprimons d'abord :

$$\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM} = k\cos\theta x + k\sin\theta y \quad \text{et} \quad \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM} = k_{rx}x + k_{ry}y + k_{rz}z$$

   Le champ électrique est tangentiel et donc continu en $x = 0$. Il est nul dans le métal pour $x = 0^+$, il est donc aussi nul dans le vide (où règne la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie) pour $x = 0^-$, soit :

$$\forall y,\ z,\ t,\ E_{0i}e^{j\omega t}e^{-jk\cos\theta\cdot 0}e^{-jk\sin\theta y} + E_{0r}e^{j\omega_r t}e^{-jk_{rx}\cdot 0}e^{-jk_{ry}y}e^{-jk_{rz}z} = 0$$

2. D'après la propriété donnée par l'énoncé, on en déduit que

$$E_{0i} + E_{0r} = 0, \quad \omega = \omega_r, \quad k\sin\theta = k_{ry} \quad \text{et} \quad 0 = k_{rz}$$

3. La relation de dispersion dans le vide pour les OPPMPR incidente et réfléchie donne

$$\left.\begin{aligned} k^2\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta &= \tfrac{\omega^2}{c_0^2} \\ k_{rx}^2 + k_{ry}^2 &= \tfrac{\omega^2}{c_0^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{donc} \quad k_{rx}^2 + k_{ry}^2 = k^2$$

$$\text{donc} \quad k_{rx}^2 = k^2 - k_{ry}^2 = k^2 - k^2\sin^2\theta = k^2\sin^2\theta$$

   Or $k_{rx} < 0$ car l'onde réfléchie se propage de droite à gauche donc $k_{rx} = -k\cos\theta$.

4. $k_{rz} = 0$ prouve que le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence (première loi de Descartes). Les vecteurs $\vec{k}_i$ et $\vec{k}_r$ sont symétriques par rapport à $\vec{u}_x$, le rayon réfléchi fait donc avec la normale un angle $r = -\theta$ (deuxième loi de Descartes).

Exercice 13 $\boxed{\textbf{Fréquence de coupure d'une cavité}}$

D'après le cours, la pulsation est quantifiée et

$$\omega = n\frac{\pi c_0}{a},\ n \text{ entier}$$

avec $\frac{\pi c_0}{a} = 50$ MHz et $n \simeq 2$ pour la bande FM.

Exercice 14 $\boxed{\textbf{Nœuds de vibration électriques et magnétiques}}$

D'après le cours, $k = n\frac{\pi}{a}$. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \sin(kx)\cos(\omega t + \varphi) \\ 0 \end{array} \right. = kE_0 \cos(kx)\cos(\omega t + \varphi)\vec{u}_z$$

$$\text{donc} \quad \vec{B} = -\frac{kE_0}{\omega}\cos(kx)\sin(\omega t + \varphi)\vec{u}_z$$

– L'amplitude de vibration du champ électrique est nulle quand

$$\sin(kx) = 0 \quad \text{donc} \quad n\frac{\pi}{a}x = p\pi \quad \text{soit} \quad x = \frac{p}{n}a$$

or $x \in [0, a]$ donc $p \in \{0, \ldots n\}$.

– L'amplitude de vibration du champ magnétique est nulle quand

$$\cos(kx) = 0 \quad \text{donc} \quad n\frac{\pi}{a}x = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad \text{soit} \quad x = \frac{a}{2n} + \frac{p}{n}a$$

or $x \in [0, a]$ donc $p \in \{0, \ldots n - 1\}$.

Exercice 15 **Propagation guidée entre deux plans**

1. En remplaçant dans l'équation de d'Alembert : $\vec{E} = \vec{E}(x,z,t) = E_y(x,z,t)\vec{u}_y$ donc

$$\Delta E_y - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{soit} \quad -k^2\beta(z)\cos(\omega t - kx) + \beta''(z)\cos(\omega t - kx) + \frac{\omega^2}{c_0^2}\beta(z)\cos(\omega t - kx) = 0$$

d'où $\beta''(z) + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2\right)\beta(z) = 0$.

2. Les conditions aux limites s'écrivent $\vec{E} = \vec{0}$ pour $z = 0$ et $z = b$, pour tout t et tout x, donc $\beta(0) = \beta(b) = 0$.

3. Si $\omega < kc_0$, le terme entre parenthèses est négatif et posons $\frac{1}{\delta^2} = k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}$. La solution générale de l'équation vérifiée par β est

$$\beta(z) = A\text{sh}\frac{z}{\delta} + B\text{ch}\frac{z}{\delta}$$

Les conditions aux limites donnent
– en $z = 0$: $0 + B = 0$ donc $B = 0$
– en $z = b$: $A\text{sh}\frac{b}{\delta} = 0$ donc $A = 0$.
Par suite $\beta(z) = 0$ et il n'y a pas d'onde. Si $\omega = kc_0$, le terme entre parenthèses est nul donc $\beta''(z) = 0$ donc $\beta(z) = Az + B$. Les conditions aux limites donnent
– en $z = 0$: $0 + B = 0$ donc $B = 0$
– en $z = b$: $Ab = 0$ donc $A = 0$.
Par suite $\beta(z) = 0$ et il n'y a pas d'onde. Par conséquent, $\omega > kc_0$. et l'équation est du type oscillateur harmonique donc

$$\beta(z) = A\cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}z\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}z\right)$$

4. Les conditions aux limites donnent
– en $z = 0$: $A + 0 = 0$ donc $A = 0$
– en $z = b$: $B\sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}b\right) = 0$
Si B est nul, $\beta(z) = 0$ et il n'y a pas d'onde, donc nécessairement

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}b\right) = 0 \quad \text{donc} \quad \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}b = n\pi,\ n \text{ entier}$$

Le terme de gauche est strictement positif donc n est un entier naturel non nul. On en déduit la relation de dispersion en élevant au carré :

$$\left[\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2\right]b^2 = n^2\pi^2 \quad \text{donc} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

Il y a une onde progressive si k est réel, donc si $k^2 > 0$, donc si

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} > 0 \quad \text{soit} \quad \omega > \frac{n\pi c_0}{b}$$

La plus petite valeur pour n est 1, donc $\omega_{\min} = \frac{\pi c_0}{b}$.

Exercice 16 $\boxed{\textbf{Modèle de l'électron élastiquement lié}}$

1. La densité volumique de charge est uniforme, soit $\rho = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$. Tout plan contenant $\overrightarrow{OP}$ est plan de symétrie des charges donc $\vec{E}$ est dans leur intersection, soit $\vec{E} = E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r$. Il y a invariance de la distribution de charges par rotations d'angle θ et φ donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Appliquons le théorème de Gauss à la sphère de rayon r, de centre O, passant par P :
$$\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad 4\pi r^2 \cdot E = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$
donc $\vec{E} = -\frac{er}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3}\vec{u}_r$.
2. La force électrique est $\vec{f} = +e\vec{E}$ soit
$$\vec{f} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3} r\vec{u}_r$$
3. Le vecteur position est $\overrightarrow{OP} = r\vec{u}_r$ donc $\vec{f} = -\kappa\overrightarrow{OP}$ qui correspond à la force de rappel d'un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur $\kappa = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3}$.
4. L'équation différentielle du mouvement de l'électron sur l'axe (P,x) découle de la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron dans le référentiel galiléen du laboratoire, en négligeant le poids devant la force électrique (assimilée à la force électrique) :
$$\vec{f} = m_e\vec{a} \quad \text{donc} \quad -\kappa x = m_e\ddot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{\kappa}{m_e}x = 0$$
donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m_e}} \simeq 10^{16}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ avec $R_0 = 10^{-10}$ m.
5. La prise en compte de la force de frottement et de la force électrique due au champ oscillant conduit à l'équation différentielle
$$-eE_0\cos(\omega t) - \kappa x - \alpha\dot{x} = m_e\ddot{x} \quad \text{soit} \quad m_e\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \kappa x = -eE_0\cos(\omega t)$$
En régime sinusoïdal forcé, on cherche $x(t)$ sous la forme $x(t) = Xcos(\omega t+\varphi)$ soit, en grandeurs complexes : $\underline{x} = Xe^{j(\omega t+\varphi)}$. On remplace dans l'équation différentielle :
$$\left[-m_e\omega^2 + j\kappa\alpha + \kappa\right]Xe^{j(\omega t+\varphi)} = -eE_0e^{j\omega t}$$
et on en déduit X et φ en identifiant modules et arguments des deux termes. Le système possède donc un moment dipolaire $\vec{P} = e\overrightarrow{NP} = -eXcos(\omega t+\varphi)\vec{u}_x$ qui forme bien un dipôle oscillant.

Exercice 17 $\boxed{\textbf{Rayonnement et perte d'énergie}}$

L'électron possède un mouvement circulaire uniforme sous l'action de la force centrale électrique, la loi de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\vec{u}_r = -m_e r_0 \omega^2 \vec{u}_r = -m\frac{v^2}{r}\vec{u}_r \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r_0^3}} = 1,59 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ m_e v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{array} \right.$$

On remarque que $\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$ avec $\theta = \omega t$ donc

$$\vec{P} = -er_0\vec{u}_r = -er_0\cos(\omega t)\vec{u}_x - er_0\sin(\omega t)\vec{u}_y$$

qui est bien la superposition de deux dipôles oscillants selon les axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, de même amplitude $P_0 = er_0 = 1,6 \cdot 10^{-29}$ C · m. L'énergie mécanique du système est la somme de l'énergie potentielle d'interaction électrique et de l'énergie cinétique de l'électron :

$$Em = Ep_{el} + \frac{1}{2}m_e v^2 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -1,2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Or un dipôle électrique dissipe de l'énergie par rayonnement : l'énergie mécanique va donc se dissiper et l'électron ne peut pas avoir un mouvement circulaire uniforme. Le modèle classique est donc rejeté et remplacé par le modèle quantique de l'atome.

Exercice 18 $\boxed{\textbf{Dipôle oscillant, dipôle tournant}}$

1. La figure (2) permet de déterminer $\vec{E}_{P_x}$. On compare cette figure à la figure (1) et on constate que l'angle θ de la figure (1) doit être remplacé par $\frac{\pi}{2} - \theta$, le vecteur $\vec{u}_\theta$ par $-\vec{u}_\theta$ et qu'on doit prendre $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ donc $\ddot{P}(t) = -\omega^2 P_0 \cos(\omega t)$, d'où par application de la formule donnée
$$\overrightarrow{E}_{Px} = \frac{\mu_0 \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{4\pi r}(-P_0\omega^2) \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c_0}\right)\right](-\overrightarrow{u}_\theta)$$
qui conduit bien au résultat de l'énoncé. De même, pour la figure (3), l'angle θ de la figure (1) doit être remplacé par $\frac{\pi}{2}$, le vecteur $-\vec{u}_\theta$ par $-\vec{u}_\varphi$ et on doit prendre $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$ donc $\ddot{P}(t) = -\omega^2 P_0 \sin(\omega t)$, d'où par application de la formule donnée
$$\overrightarrow{E}_{Py} = \frac{\mu_0 \sin(\frac{\pi}{2})}{4\pi r}(-P_0\omega^2) \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c_0}\right)\right](-\overrightarrow{u}_\varphi)$$
qui conduit bien au résultat de l'énoncé.
2. Les deux champs électriques ne sont pas en phase, l'onde en M est donc polarisée rectilignement si $\overrightarrow{E}_{Px} = \vec{0}$, donc si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, polarisation selon $\vec{u}_y$.