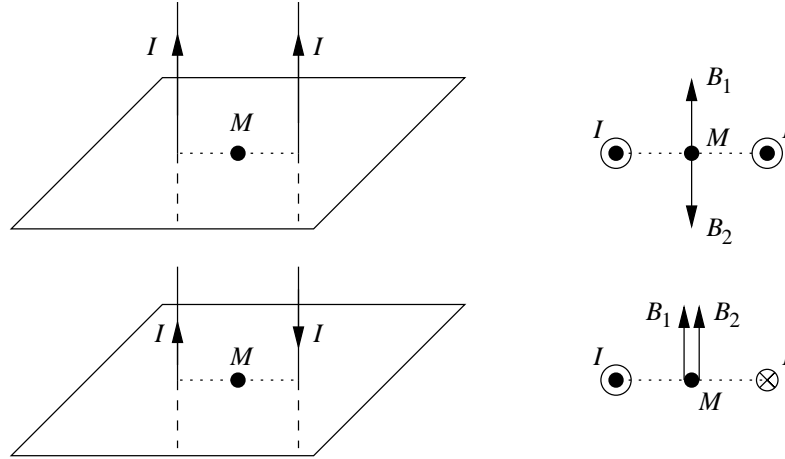


Chapitre 6

Magnétostatique

Exercice 1 Nullité de champs magnétiques

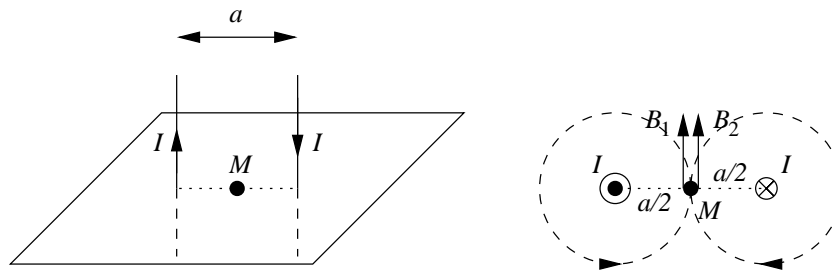
1. Le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini a pour norme $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. En un point M , la somme des deux champs est donc nulle si et seulement si leurs normes sont égales, et comme l'intensité est la même, il est donc nécessaire que $r_1 = r_2$ et que le point M soit dans le plan médiateur des deux fils. Les champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 doivent aussi avoir même direction; or \vec{B}_1 est orthogonal au plan de symétrie contenant le fil 1 et M et \vec{B}_2 est orthogonal au plan de symétrie contenant le fil 2 et M . Ces deux plans sont donc confondus et M est dans le plan des deux fils. En somme, M appartient à la droite parallèle aux deux fils, à égale distance et dans leur plan. Sur la figure ci-dessous, les règles donnant le sens de \vec{B} prouvent que $\vec{B}(M) = \vec{0}$ si les deux courants circulent dans le même sens.



2. Les plans $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont deux plans distincts de symétrie des courants, $\vec{B}(M)$ doit donc être perpendiculaire à deux plans distincts, il est donc nul.
3. Les plans $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont deux plans distincts de symétrie des courants, $\vec{B}(M)$ doit donc être perpendiculaire à deux plans distincts, il est donc nul.

Exercice 2 Association de deux fils

Les notations sont celles du schéma suivant :



L'application du théorème d'Ampère pour chacun des fils donne

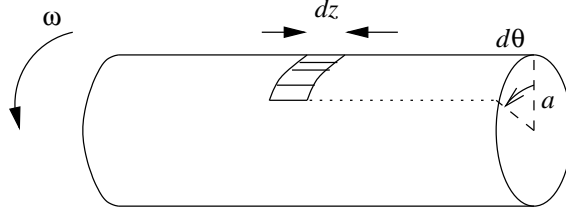
$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot \frac{a}{2}}$$

Les deux champs ont même sens et même direction, le champ total est donc $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi a}$.

Exercice 3 **Cylindre chargé en rotation, en translation**

1. Cylindre en rotation.

(a) Les notations sont celles du schéma suivant.



Par définition de la densité surfacique de courant, les charges se déplacent de façon orthoradiale et

$$\vec{j}_o = j_o \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad j_o = \frac{di}{dz} = \frac{dq}{dt \cdot dz}$$

où di est l'intensité du courant circulant à travers la languette de largeur dz et dq la charge traversant la languette pendant dt . C'est donc la charge située sur la facette hachurée sur le schéma ; sa surface est

$$dS = dz \cdot a d\theta = a \cdot dz \cdot \omega dt \quad \text{donc} \quad dq = \sigma dS = \sigma a \omega \cdot dz \cdot dt$$

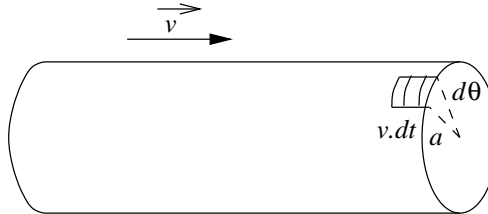
$$\text{donc} \quad j_o = \frac{\sigma a \omega \cdot dz \cdot dt}{dt \cdot dz} = \sigma a \omega$$

(b) Le courant est orthoradial comme dans le cas du solénoïde. Reprenons le calcul du champ magnétique créé par le solénoïde, vu dans le cours : le courant enlacé par le rectangle de largeur d est $j_o \cdot d$ et le théorème d'Ampère donne

$$B \cdot d = \mu_0 j_o \cdot d \quad \text{donc} \quad B = \mu_0 j_o \quad \text{donc} \quad \vec{B} = \mu_0 \sigma a \omega \vec{u}_z$$

2. Cylindre en translation.

(a) Les notations sont celles du schéma suivant.



Par définition de la densité surfacique de courant, les charges se déplacent de façon axiale et

$$\vec{j}_a = j_a \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad j_a = \frac{di}{d\ell} = \frac{di}{a d\theta} = \frac{dq}{adt \cdot d\theta}$$

où di est l'intensité du courant circulant à travers la languette de largeur $d\ell = a d\theta$ et dq la charge traversant la languette pendant dt . C'est donc la charge située sur la facette hachurée sur le schéma ; sa surface est

$$dS = dz \cdot a d\theta = v_0 dt \cdot a d\theta \quad \text{donc} \quad dq = \sigma dS = \sigma a v_0 dt \cdot d\theta$$

$$\text{donc} \quad j_a = \frac{\sigma a v_0 dt \cdot d\theta}{adt \cdot d\theta} = \sigma v_0$$

(b) Les symétries et invariances sont celles du cylindre infini, donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$. Appliquons le théorème d'Ampère en choisissant pour contour le cercle \mathcal{C} de rayon r passant par M et orienté selon \vec{u}_θ . La circulation de \vec{B} le long de \mathcal{C} est

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi r$$

Si $r < a$, \mathcal{C} est à l'intérieur du cylindre creux et il n'enlace donc aucun courant donc $\vec{B}(r < a) = \vec{0}$. Si $r > a$, le courant enlacé est celui circulant à travers la section circulaire de rayon a du cylindre :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad \text{soit} \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j_a \cdot 2\pi a = \mu_0 \sigma v_0 \cdot 2\pi a$$

donc $\vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 \sigma v_0 a}{r} \vec{u}_\theta$.

Exercice 4 **Bobinages**

1. Le champ magnétique a été exprimé dans le cours en fonction de n , le nombre de spires par mètre. Sur une longueur totale L du cylindre, les spires étant au contact l'une de l'autre, on peut faire $N = \frac{L}{b}$ tours, donc

$$n = \frac{N}{L} = \frac{1}{b} \quad \text{donc} \quad \vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{b} \vec{u}_z$$

Si le fil n'était pas gainé ou vernis, le courant irait d'une extrémité à l'autre du solénoïde en ligne presque droite, en sautant d'une spire à l'autre sans parcourir la totalité du bobinage.

2. Bobinage désaxé.

- (a) Sur une largeur $d\ell$ perpendiculaire au bobinage, on peut disposer $dN = \frac{d\ell}{b}$ spires ; chacune d'elles est parcourue par un courant d'intensité I donc

$$j = \frac{di}{d\ell} = \frac{dN \cdot I}{d\ell} = \frac{I}{b} \quad \text{donc} \quad \vec{j} = \frac{I}{b} \vec{u}$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire dans la direction des spires.

- (b) En projetant sur les vecteurs unitaires orthoradial \vec{u}_θ et axial \vec{u}_z :

$$\vec{j} = j_o \vec{u}_\theta + j_a \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad j_o = \frac{I}{b} \cos \alpha \quad \text{et} \quad j_a = \frac{I}{b} \sin \alpha$$

- (c) Utilisons les résultats de l'exercice 3 (voir corrigé).
 – Le champ créé par $j_o \vec{u}_\theta$ est assimilable à celui d'un solénoïde : il est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur :

$$\vec{B}(r < a) = \mu_0 j_o \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{b} \cos \alpha \vec{u}_z$$

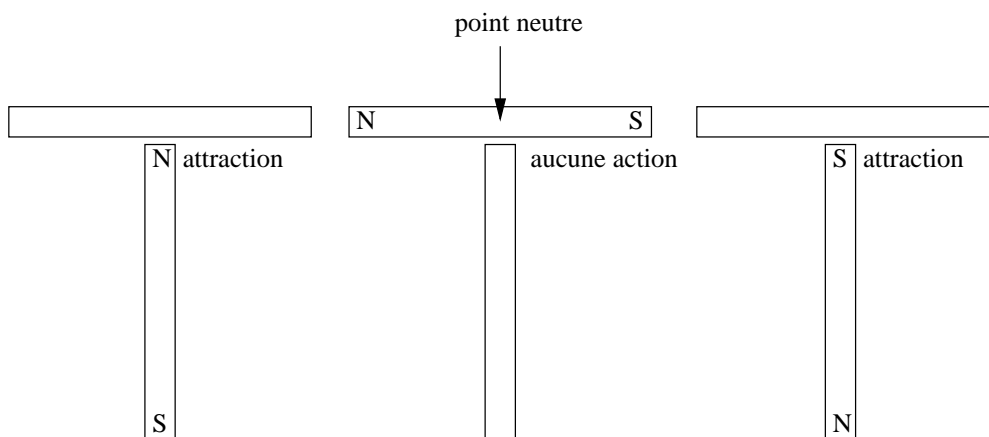
- Le champ créé par $j_a \vec{u}_z$ est nul à l'intérieur et à l'extérieur il vaut

$$\vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 j_a a}{r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I a}{br} \sin \alpha \vec{u}_\theta$$

Le champ magnétique est la somme des deux, il est donc défini à l'intérieur et à l'extérieur par les deux expressions précédentes.

Exercice 5 **Lignes de champ**

1. D'après le cours, le champ est plus fort lorsque la section du tube de champ est étroite : c'est le cas à proximité des pôles. Le champ est uniforme si les lignes de champ sont rectilignes (direction constante) et parallèles pour que la section des tubes de champ soit constante (norme constante) : c'est le cas dans l'« entrefer », c'est-à-dire la zone située entre les pôles.
2. Il suffit de rapprocher deux aimants droits de même axe, le pôle Nord de l'un à proximité du pôle Sud de l'autre : dans l'espace situé entre ces deux pôles, le champ est fort et sensiblement uniforme.
3. Rapprochons l'extrémité d'un des deux barreaux du centre de l'autre, en formant un « T »



- Si les barreaux se collent, c'est que l'extrémité du barreau vertical est le pôle Nord ou le pôle Sud de l'aimant, et qu'une force magnétique rapproche le barreau de l'aimant. Le barreau vertical est donc l'aimant et le barreau horizontal celui de fer.
- Si aucune force ne s'exerce, c'est que l'extrémité du barreau vertical est celle du barreau de fer, et qu'en l'approchant du milieu de l'aimant, on l'approche du point neutre où le champ magnétique est presque nul. Le barreau horizontal est donc l'aimant, le barreau vertical celui de fer.

Exercice 6 **Magnéton de Bohr**

1. En mouvement circulaire uniforme :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta \quad \text{donc} \quad Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

D'après l'énoncé :

$$Ec = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}r\omega \quad \text{donc} \quad r^2\omega = \frac{\hbar}{m_e}$$

2. L'électron effectue 1 tour en T secondes, donc en un point donné de la trajectoire circulaire, on observe un débit de charge dont la valeur absolue est

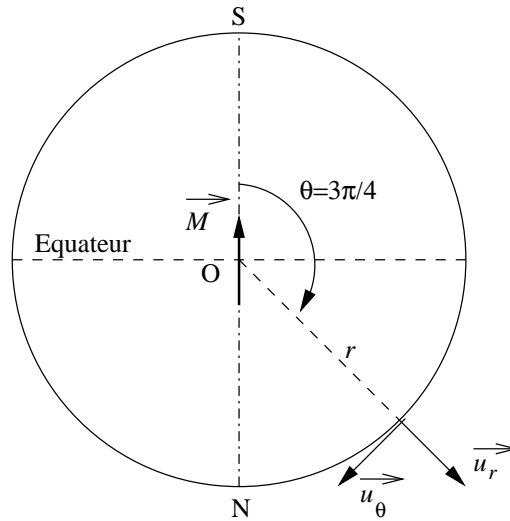
$$i = \frac{e}{T} \quad \text{donc} \quad \mu_B = iS = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2 = \frac{e\pi r^2}{T}$$

3. La période T est liée à la vitesse angulaire ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{donc} \quad \mu_B = \frac{e\pi r^2\omega}{2\pi} = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Exercice 7 Champ magnétique terrestre

Faisons un schéma de la Terre vue en coupe avec le pôle Sud en haut et le pôle Nord en bas.



En coordonnées sphériques, le point sur le 45ième parallèle est repéré par l'angle $\theta = \frac{3\pi}{4}$, le rayon $r = R_T$, le vecteur \vec{u}_r correspond à la verticale ascendante et le vecteur \vec{u}_θ à l'horizontale dirigée vers le nord. On peut donc identifier l'expression du champ magnétique dipolaire donnée par le cours à celui observé expérimentalement :

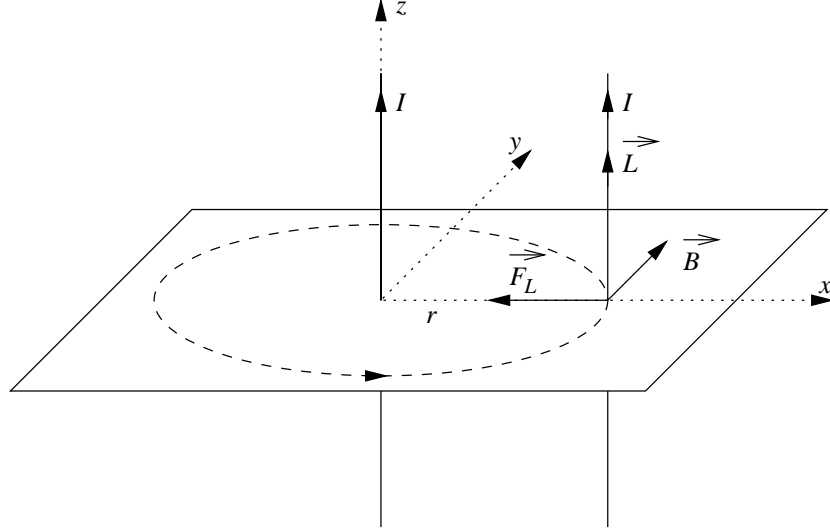
$$\vec{B} \left| \begin{array}{l} \frac{2\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^3} \\ \frac{2\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3} \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\mu_0 M \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4\pi R_T^3} = -4,2 \cdot 10^{-5} \\ \frac{\mu_0 M \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4\pi R_T^3} = 2,1 \cdot 10^{-5} \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

Les deux équations sont équivalentes (en rapport 2 à gauche comme à droite), ce qui prouve la validité du modèle. On en déduit

$$M = \frac{4\pi R_T^3 B_H \sqrt{2}}{\mu_0} = 7,7 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Exercice 8 Définition légale de l'Ampère

La force linéique est le rapport entre la force de Laplace et la longueur L du tronçon de fil qui subit cette force. Les notations sont celles du schéma suivant.



Le champ magnétique créé par le fil de gauche en tout point du fil de droite est calculé en appliquant le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad \text{soit} \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_y$$

La force de Laplace subie par un tronçon de longueur L du fil de droite est donc

$$\vec{F}_L = I \vec{L} \wedge \vec{B} = IL \vec{u}_z \wedge \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_y \right) = -\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi r} \vec{u}_x$$

C'est une force attractive dont la valeur linéique est

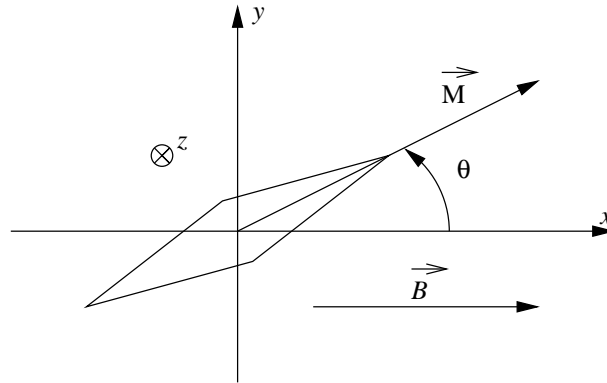
$$f_{\text{lin}} = \frac{F_L}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} \quad \text{donc} \quad \mu_0 = \frac{2\pi r f_{\text{lin}}}{I^2}$$

et avec $I = 1$ A (valeur exacte), $r = 1$ m (valeur exacte) et $f_{\text{lin}} = 2 \cdot 10^{-7}$ N (valeur exacte), on trouve bien

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Exercice 9 **Boussole**

1. D'après le cours, la boussole est un dipôle qui a tendance à s'aligner avec le champ magnétique terrestre.
2. Les oscillations sont celles d'un oscillateur harmonique autour d'une position d'équilibre stable (voir cours de mécanique). Modélisons le problème en assimilant la boussole en rotation autour de son axe fixe (O, \vec{u}_z) à un solide de centre d'inertie O , de moment d'inertie J et notons θ l'angle entre le champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{u}_x$ et le moment dipolaire \vec{M} de la boussole.



L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique du solide en rotation et de l'énergie potentielle d'interaction entre \vec{B} et \vec{M} :

$$Em = \frac{1}{2}J\omega^2 - \vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - MB \cos \theta$$

En l'absence de frottements, Em est constante donc sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\frac{dEm}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}J \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + MB\dot{\theta} \sin \theta = 0$$

On simplifie par $\dot{\theta}$, et dans l'hypothèse des petits angles, $\sin \theta \simeq \theta$; on obtient donc une équation différentielle du type oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{MB}{J}\theta = 0 \quad \text{donc} \quad \theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{MB}{J}$$

En prenant en compte des frottements faibles, les oscillations sont amorties avec une pseudo-période proche de la période propre, jusqu'à immobilisation de la boussole dans la direction $\theta = 0$, correspondant bien à l'alignement de \vec{M} avec \vec{B} .

Exercice 10 **Losange dans un champ magnétique**

1. Conjugons l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre le champ magnétique extérieure et le moment dipolaire du dipôle d'une part, celle du flux du champ magnétique à travers le circuit d'autre part :

$$\begin{cases} Ep = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} = -I\vec{S} \cdot \vec{B} \\ \Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S} \end{cases} \quad \text{donc} \quad Ep = -I\Phi$$

2. Le cadre est soumis aux quatre forces de Laplace et au poids. La méthode énergétique est évidemment beaucoup plus rapide que la méthode dynamique. L'énergie totale du circuit est la somme de l'énergie d'interaction Ep exprimée à la première question et de l'énergie potentielle de pesanteur Ep_p :

$$E = Ep + Ep_p = -I \cdot (-BS) + 4mz_G$$

(l'orientation du circuit montre que \vec{B} et $d\vec{S}$ sont en sens opposés). Exprimons l'énergie totale en fonction de l'unique variable θ . L'aire du losange est égale à 4 fois l'aire du triangle rectangle :

$$S = 4 \times \frac{a \sin \alpha \cdot a \cos \alpha}{2} = 2a^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

L'altitude de G est $z_G = -a \cos \alpha$. On en déduit que

$$E = 2a^2 IB \sin \alpha \cos \alpha - 4mga \cos \alpha = 2a^2 IB [\sin \alpha \cos \alpha - \gamma \cos \alpha] \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2mg}{IBa}$$

Les positions d'équilibre sont définies par l'annulation de la dérivée :

$$\frac{dE}{d\alpha} = 2a^2 IB [\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \gamma \sin \alpha] = -2a^2 IB [2 \sin^2 \alpha - \gamma \sin \alpha - 1]$$

Posons $S = \sin \alpha$.

$$\frac{dE}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow 2S^2 - \gamma S - 1 = 0$$

α étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on ne garde que la solution positive de l'équation du second degré en S :

$$S = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8}}{4}$$

Si ce terme est supérieur à 1, il n'y a pas de position d'équilibre (si ce n'est celle où le losange est fermé) ; s'il est inférieur à 1, alors α est l'angle tel que

$$\sin \alpha = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8}}{4}$$

Exercice 11 **Antenne à champ magnétique**

1. Orientons le circuit dans le sens trigonométrique, ce qui revient à poser $\vec{dS} = +dx \cdot dy \vec{u}_z$. Le flux total est $\Phi = N \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$ soit

$$\Phi = N \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b B_0 \cos \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right] dx dy = NB_0 \left[\frac{\sin \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right]}{-\frac{2\pi f}{c_0}} \right]_{x=0}^a [y]_{y=0}^b$$

$$\text{soit } \Phi = -\frac{NB_0bc_0}{2\pi f} \left[\sin \left[2\pi f \left(t - \frac{a}{c_0} \right) \right] - \sin(2\pi ft) \right]$$

En utilisant la relation $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$, on peut donc écrire

$$\Phi = \frac{2NB_0bc_0}{2\pi f} \sin \frac{\pi fa}{c_0} \cos \left[2\pi f \left(t - \frac{a}{2c_0} \right) \right]$$

2. Par application de la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = 2NB_0bc_0 \sin \frac{\pi fa}{c_0} \sin \left[2\pi f \left(t - \frac{a}{2c_0} \right) \right]$$

On reconnaît une tension sinusoïdale du temps, la valeur efficace est donc égale à la valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$:

$$E = \sqrt{2}NB_0bc_0 \left| \sin \frac{\pi fa}{c_0} \right|$$

3. E est maximale quand b est maximal (pas de limite physique) et si le sinus vaut ± 1 donc si

$$\frac{\pi fa}{c_0} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{soit} \quad a = \frac{c_0}{2f} + n\frac{c_0}{f}$$

où n est un entier naturel. Remarquons qu'on peut écrire $a = \frac{\lambda_0}{2} + n\lambda_0$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide de l'onde électromagnétique associée au champ magnétique perçu.

Exercice 12 **Bobinages**

1. Le premier bobinage comporte $N_1 = \frac{d}{a}$ spires donc $n_1 = \frac{N_1}{d} = \frac{1}{a}$ spires par mètre. Le second comporte $N_2 = 2 \times \frac{d}{a}$ spires donc $n_2 = \frac{N_2}{d} = \frac{2}{a}$ spires par mètre. Les champs créés par les deux bobinages sont uniformes à l'intérieur et valent respectivement

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i_1 \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \mu_0 n_2 i_2 \vec{u}_z$$

Le flux propre du solénoïde 1 vaut

$$\Phi_{11} = N_1 \cdot B_1 \cdot \pi r^2 = \mu_0 N_1 n_1 \pi r^2 i_1 = \frac{\mu_0 d \pi r^2}{a^2} i_1 = L i_1 \quad \text{donc} \quad L_1 = L$$

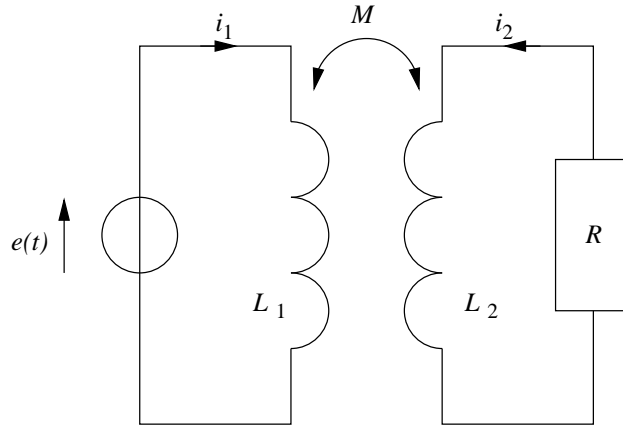
Le flux propre du solénoïde 2 vaut

$$\Phi_{22} = N_2 \cdot B_2 \cdot \pi r^2 = \mu_0 N_2 n_2 \pi r^2 i_2 = \frac{4 \mu_0 d \pi r^2}{a^2} i_2 = 4 L i_2 \quad \text{donc} \quad L_2 = 4 L$$

Le flux du champ magnétique \vec{B}_2 à travers le solénoïde 1 vaut

$$\Phi_{21} = N_1 \cdot B_2 \cdot \pi r^2 = \mu_0 N_1 n_2 \pi r^2 i_2 = \frac{2 \mu_0 d \pi r^2}{a^2} i_2 = 2 L i_2 \quad \text{donc} \quad M = 2 L$$

2. Le circuit électrique est modélisé ainsi :



Les équations électriques s'écrivent donc :

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + 2L \frac{di_2}{dt} = U_0 \cos(\omega t) \\ 2L \frac{di_1}{dt} + 4L \frac{di_2}{dt} = -R i_2 = -4L \omega i_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad i_2(t) = -\frac{2U_0}{R} \cos(\omega t) = -\frac{2U_0}{4L\omega} \cos(\omega t)$$

En remplaçant dans la première équation, on en déduit

$$L \frac{di_1}{dt} = U_0 \cos(\omega t) + 2L \frac{2U_0}{4L\omega} (-\omega) \sin(\omega t) = U_0 [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)]$$

$$\text{donc} \quad i_1(t) = \frac{U_0}{L\omega} [\sin(\omega t) + \cos(\omega t)] = \frac{U_0 \sqrt{2}}{L\omega} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4U_0 \sqrt{2}}{R} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 13 Étude d'une pince ampèremétrique

1. On applique le théorème d'Ampère le long d'un lacet circulaire de rayon r orienté dans le sens de \vec{u}_θ :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} B(r) r d\theta = \mu_0 [i + N i_1]$$

$$\text{soit } \vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} [i + N i_1] \vec{u}_\theta$$

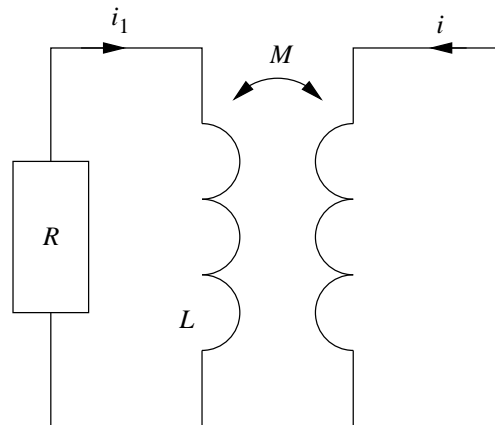
2. Le flux du champ magnétique total à travers les N spires du bobinage est

$$\Phi = N \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{soit}$$

$$\Phi = N \int_{r=a}^b \int_{z=0}^c \frac{\mu_0}{2\pi r} [i + N i_1] dr dz = \frac{N \mu_0 c [i + N i_1] \ln \frac{b}{a}}{2\pi}$$

soit $\Phi = L i_1 + M i$ avec $L = \frac{N^2 \mu_0 c \ln 2}{2\pi}$ et $M = \frac{N \mu_0 c \ln 2}{2\pi}$.

3. La longueur totale du bobinage est celle des N carrés juxtaposés, soit $N \cdot 4a$. La résistance totale est donc $R = 4Na\lambda$. Le schéma équivalent du circuit est donc le suivant :



4. La loi des mailles appliquée au circuit du bobinage s'écrit

$$R i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di}{dt} = 0$$

soit, en régime sinusoïdal forcé, en formalisme complexe

$$[R + jL\omega] \underline{i_1} = -jM\omega \underline{i} \quad \text{donc} \quad \underline{H} = \frac{-jM\omega}{R + jL\omega}$$

5. Si on considère que $R \ll L\omega$, alors $\underline{H} = -\frac{M}{L} = -\frac{1}{N}$ donc en grandeurs efficaces $I_1 = \frac{I_0}{N}$: la mesure de I_1 donne donc accès à I_0 sans qu'on soit obligé, comme pour un ampèremètre classique, d'ouvrir le circuit pour insérer l'appareil.

Exercice 14 **Rails de Laplace**

1. L'orientation du circuit entraîne que $\vec{dS} = dS\vec{u}_z$ et $\vec{B} = -B\vec{u}_z$. Le flux vaut donc

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = -B \cdot S$$

où $S = Dx$ est l'aire du circuit rectangulaire, donc $\Phi = -BDx$.

2. La force électromotrice d'induction est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = BD\dot{x}$$

Le schéma équivalent est obtenu en remplaçant la tige par un générateur idéal de tension de force électromotrice e orientée dans le sens de i . L'équation électrique est la loi des mailles :

$$E + e - u_R - u_C = 0 \quad \text{soit} \quad E + BD\dot{x} = Ri + u_C \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

3. La tige est soumise au poids et à la réaction normale du support qui se compensent et à la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = iD\vec{u}_y \wedge (-B\vec{u}_z) = -iBD\vec{u}_x$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la tige dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit

$$\vec{F}_L = m\vec{a} \quad \text{soit} \quad -iBD = m\ddot{x}$$

4. En multipliant l'équation électrique par i et l'équation mécanique par \dot{x} , on obtient le système

$$\begin{cases} Ei + iBD\dot{x} = Ri^2 + iu_C \\ -iBD\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} Ei + iBD\dot{x} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Cu_C^2 \right) \\ -iBD\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right) \end{cases}$$

On observe donc, conformément au cours, que la puissance de la force électromotrice d'induction est exactement opposée à la puissance de la force de Laplace. En sommant les deux équations, on peut écrire

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Cu_C^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right)$$

La puissance électrique fournie par le générateur se transforme donc en énergie thermique dissipée par effet Joule dans la résistance, énergie électrique dans le condensateur et énergie cinétique de la tige.

5. En remplaçant i par $C \frac{du_C}{dt}$ dans l'équation mécanique, il vient

$$-BDC \frac{du_C}{dt} = m\ddot{x} \quad \text{donc} \quad -BDCu_C = m\dot{x} \quad \text{soit} \quad u_C = -\frac{m}{BDC}\dot{x}$$

en utilisant les conditions initiales et la continuité de u_C et celle de la vitesse \dot{x} . En remplaçant i et u_C dans l'équation électrique, on en déduit l'équation vérifiée par x :

$$E + BD\dot{x} = R \cdot \frac{-m\ddot{x}}{BD} - \frac{m}{BDC}\dot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{B^2D^2}{mR} \right) \dot{x} = -\frac{EBD}{mR}$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} = -\frac{1}{\tau}v_0 \quad \text{ou} \quad \dot{v} + \frac{1}{\tau}v = -\frac{1}{\tau}v_0$$

dont la solution générale est du type

$$v(t) = -v_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

La tige a donc un mouvement accéléré puis tend vers une vitesse limite dans un mouvement permanent de droite à gauche, jusqu'à ce qu'elle butte contre les dipôles à gauche.

Exercice 15 **Roue de Barlow**

1. La force de Laplace sur le rayon est

$$\vec{F}_L = i\vec{OH} \wedge \vec{B} = -i(b\vec{u}_z) \wedge (B\vec{u}_y) = ibB\vec{u}_x$$

2. Le bras de levier est égal au demi-rayon et en choisissant le sens positif de rotation dans le sens trigonométrique :

$$\mathcal{M}_{\Delta,L} = F_L \cdot \frac{b}{2} = iB\frac{b^2}{2}$$

3. La loi du moment cinétique appliquée au disque dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit

$$\mathcal{M}_{\Delta,L} + \mathcal{M}_{\Delta} = \frac{dL_{\Delta}}{dt} \quad \text{soit} \quad iB\frac{b^2}{2} - \alpha\omega = J\dot{\omega}$$

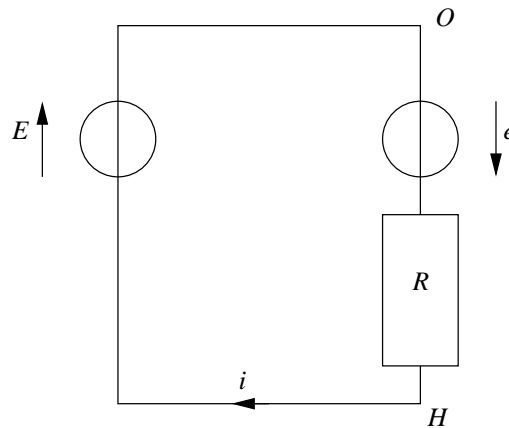
4. Le flux de \vec{B} à travers le circuit délimité par les tronçons de fil et par le rayon mobile est, d'après l'orientation de i :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S$$

Par application de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -B\frac{\frac{d\theta}{2\pi} \cdot \pi b^2}{dt} = -\frac{Bb^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{Bb^2\omega}{2}$$

5. Le circuit électrique équivalent est obtenu en remplaçant le rayon OH par l'association de la force électromotrice d'induction en orientation générateur et la résistance R .



L'équation électrique s'écrit donc

$$E + e = Ri \quad \text{soit} \quad E - \frac{Bb^2}{2}\omega = Ri$$

6. On en déduit l'expression de i qu'on remplace dans l'équation mécanique :

$$i = \frac{E}{R} - \frac{Bb^2}{2R}\omega \quad \text{donc} \quad J\dot{\omega} + \left(\alpha + \frac{B^2b^4}{4R}\right)\omega = \frac{Bb^2E}{2R}$$

La vitesse limite est atteinte lorsque $\frac{d\omega}{dt} = 0$ donc

$$\omega_{\text{lim}} = \frac{2Bb^2E}{B^2b^4 + 4R\alpha}$$

7. La roue de Barlow opère une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique.