Chapitre 4

Équations de Maxwell

Exercice 1 $\boxed{\textbf{Calcul de champs}}$

1. La loi de conservation de la charge s'écrit div $\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\text{soit} \quad -\frac{j_0}{r} + \frac{\rho_0 r_0}{\tau r} = 0 \quad \text{donc} \quad j_0 = \frac{\rho_0 r_0}{\tau} = 15 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{ m}^{-2}$$

2. L'équation de Maxwell-Thomson est immédiatement vérifiée :

$$\vec{B} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \text{div } \overrightarrow{B} = 0$$

3. L'équation de Maxwell-Gauss div $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ s'écrit, en utilisant l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rE}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{t}{\tau}\frac{r_0}{r} \quad \text{donc} \quad rE(r,t) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{t}{\tau}r_0 r + K(t)$$

$$\text{soit} \quad \overrightarrow{E} = \left[\frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0 \tau}t + \frac{K(t)}{r}\right]\overrightarrow{u}_r$$

4. L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ s'écrit

$$\overrightarrow{0} = \mu_0 \left[-\frac{\rho_0 r_0}{\tau} + \varepsilon_0 \frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0 \tau} + \frac{K'(t)}{r}\right]\overrightarrow{u}_r$$

$$\text{donc} \quad K'(t) = 0 \quad \text{et} \quad K(t) = K$$

5. L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ est vérifiée car le rotationnel de $\vec{E}$ est nul et $\vec{B} = \vec{0}$.

6. Le théorème de Gauss $\iint_\Sigma \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\mathcal{V} \rho d\tau$ est appliqué en choisissant pour Σ un cylindre de rayon r et de hauteur h arbitraire. $\overrightarrow{E}$ est selon $\overrightarrow{u}_r$ donc son flux n'est non nul que sur la paroi latérale où $d\overrightarrow{S} = rd\theta dz \overrightarrow{u}_r$; l'élément de volume du cylindre intérieur $\mathcal{V}$ est $d\tau = rdrd\theta dz$, d'où

$$\int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0 \tau}t + \frac{K(t)}{r}\right] rd\theta dz = \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{r}\rho_0 \frac{t}{\tau}\frac{r_0}{r} rdrd\theta dz$$

$$\text{soit} \quad 2\pi rh\left[\frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0 \tau}t + \frac{K(t)}{r}\right] = 2\pi rh\frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0 \tau}t$$

d'où $K = 0$ et $\overrightarrow{E} = \frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0 \tau}t\overrightarrow{u}_r$.

7. À $t = \tau$:

$$\overrightarrow{E} = \frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_r$$

C'est donc un champ radial uniforme de norme $E = 2,5 \cdot 10^9$ V $\cdot$ m^{-1}.

Exercice 2 $\boxed{\textbf{Résolution de l'équation de Laplace}}$

1. Le vide règne entre les deux plaques donc le potentiel vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \quad \text{donc} \quad V(z) = Az + B$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = A \cdot 0 + B \\ U = Ad + B \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad B = 0 \quad \text{et} \quad A = \frac{U}{d}$$

$$\text{donc} \quad V(z) = U\frac{z}{d} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{U}{d}\vec{u}_z$$

2. L'application de la loi donnée par l'énoncé donne, en $z = 0^+$ et en $z = d^-$:

$$-\frac{U}{d}\vec{u}_z = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad -\frac{U}{d}\vec{u}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\vec{u}_z)$$

$$\text{donc} \quad \frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \quad \text{soit} \quad q = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot U$$

La capacité est donc $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

3. Condensateur conique.
   (a) La distribution de charges est invariante par rotation d'angle φ donc V ne dépend pas de φ.
   (b) $\Delta V = 0$ donc en coordonnées sphériques

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Remarquons que le potentiel est uniforme sur les deux plaques ($\theta = \alpha$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$), ce qui est cohérent avec le fait que V ne dépend pas de r. L'équation de Laplace s'écrit donc

$$\sin\theta V'(\theta) = K \quad \text{soit} \quad V'(\theta) = \frac{K}{\sin\theta} \quad \text{donc} \quad V(\theta) = K\ln\left[\tan\frac{\theta}{2}\right] + C$$

La condition aux limites $V(\alpha) = 0$ donne $C = -K\ln\left[\tan\frac{\alpha}{2}\right]$ donc $V(r,\theta) = K\ln\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.
La condition aux limites $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = U$ donne $U = -K\ln\left[\tan\frac{\alpha}{2}\right]$

   (c) On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ donc en sphériques

$$\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi = \frac{K}{r\sin\theta}\vec{u}_\theta$$

   (d) D'après la propriété donnée par l'énoncé, au voisinage de la plaque, pour $\theta = \frac{\pi}{2}^-$ (où $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$) :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z = -\frac{K}{r\sin\frac{\pi}{2}}\vec{u}_z \quad \text{donc} \quad \sigma = -\frac{K}{\varepsilon_0 r}$$

   (e) Par intégration sur la plaque :

$$q = \iint \sigma dS = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} -\frac{K}{\varepsilon_0 r} r dr d\varphi = -\frac{K2\pi R}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi R U}{\varepsilon_0 \ln\left[\tan\frac{\alpha}{2}\right]}$$

   (f) Par définition de la capacité du condensateur, $q = CU$ donc $C = \frac{2\pi R}{\varepsilon_0 \ln\left[\tan\frac{\alpha}{2}\right]}$

Exercice 3 $\boxed{\textbf{Diode à vide}}$

1. La relation entre V et ρ est l'équation de Poisson qu'on exprime en coordonnées cylindriques pour $V(r)$:
$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=-\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$
2. L'électron part de $r=0$ avec $v(0)=0$ et $V(0)=0$ et passe par un point M de rayon r avec une vitesse $v(r)$ et un potentiel $V(r)$. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc
$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-e\cdot 0=\frac{1}{2}mv^2(r)-eV(r)\quad\text{donc}\quad v^2(r)=\frac{2e}{m}V(r)$$
3. En intégrant sur un cylindre de hauteur h et de rayon r :
$$i=\iint\vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}=\int_{z=0}^{h}\int_{\theta=0}^{2\pi}\rho(r)v(r)\vec{u}_r\cdot(-rd\theta dz\vec{u}_r)$$
$$\text{soit}\quad i=-\rho(r)\cdot v(r)\cdot 2\pi rh$$
4. De la question (2) on tire $v(r)=\sqrt{\frac{2e}{m}V(r)}$ et en injectant cette expression dans la relation de la question 3 :
$$\rho(r)=-\frac{i}{2\pi rhv(r)}=-\frac{i}{r}\cdot V^{-\frac{1}{2}}(r)\sqrt{\frac{m}{8\pi^2h^2e}}$$
En remplaçant dans la relation de la question 1, on en déduit :
$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=\frac{i}{r}\cdot V^{-\frac{1}{2}}(r)\sqrt{\frac{m}{8\pi^2h^2e\varepsilon_0^2}}$$
$$\text{soit}\quad\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=\beta\frac{i}{r}\cdot V^{-\frac{1}{2}}(r)\quad\text{avec}\quad\beta=\sqrt{\frac{m}{8\pi^2h^2e\varepsilon_0^2}}$$
5. En posant $V(r)=Kr^\alpha$, on exprime :
$$\frac{dV}{dr}=\alpha Kr^{\alpha-1},\quad\frac{d^2V}{dr^2}=\alpha(\alpha-1)Kr^{\alpha-2}\quad\text{et}\quad V^{-\frac{1}{2}}(r)=K^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{\alpha}{2}}$$
On remplace dans l'équation trouvée à la question 4 :
$$\alpha(\alpha-1)Kr^{\alpha-2}+\alpha Kr^{\alpha-2}=\beta iK^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{\alpha}{2}-1}\quad\text{soit}\quad\alpha^2K^{\frac{3}{2}}r^{\alpha-2}=\beta ir^{-\frac{\alpha}{2}-1}$$
Cette relation devant être valable pour tout r, on identifie les puissances et les coefficients :
$$\left\{\begin{array}{l}\alpha-2=\frac{\alpha}{2}+1\\ \alpha^2K^{\frac{3}{2}}=\beta i\end{array}\right.\quad\text{soit}\quad\left\{\begin{array}{l}\alpha=\frac{2}{3}\\ K=\left[\frac{9\beta i}{4}\right]^{\frac{2}{3}}\end{array}\right.$$
6. On a donc
$$V(r)=\left[\frac{9\beta}{4}\right]^{\frac{2}{3}}i^{\frac{2}{3}}r^{\frac{2}{3}}$$
Pour $r=R$, $V(R)=u$ donc
$$u=\left[\frac{9\beta R}{4}\right]^{\frac{2}{3}}i^{\frac{2}{3}}$$

Exercice 4 $\boxed{\textbf{Cyclotron}}$

1. Dans chacun des deux D, l'électron est soumis à un champ magnétique et le champ électrique est nul : la norme de la vitesse est donc constante. Dans les chambres rectangulaires, l'électron est soumis à une tension accélératrice. D'après le cours, on peut donc écrire les deux relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}m_e v'^2(n) - \frac{1}{2}m_e v^2(n) = eU \\ \frac{1}{2}m_e v^2(n+1) - \frac{1}{2}m_e v'^2(n) = eU \end{array}\right. \qquad \text{donc} \quad v^2(n+1) - v^2(n) = \frac{4eU}{m_e}$$

La suite $v^2(n)$ est donc une suite arithmétique de raison $\frac{4eU}{m_e}$ et de premier terme $v(0) = 0$. On en déduit que

$$v^2(n) = \frac{4eU}{m_e} \cdot n \quad \text{donc} \quad v(n) = \sqrt{\frac{4eU}{m_e}}\sqrt{n}$$

2. La condition de sortie s'écrit

$$r_f = R \quad \text{donc} \quad v(n_f) = \frac{eBR}{m_e} \quad \text{et} \quad n_f = \frac{eB^2R^2}{4mU}$$

Exercice 5 **Particule chargée dans un champ $\vec{E}$ ou $\vec{B}$**

1. La loi de la quantité de mouvement appliqué au proton dans le référentiel galiléen du laboratoire donne, en néglgeant le poids devant la force électrique :

$$e\vec{E} = m\vec{a} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{eE}{m} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = \frac{eE}{m}t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{eE}{2m}t^2 \end{cases}$$

2. La trajectoire du proton est donc parabolique, le proton sortira s'il ne s'écrase pas sur la plaque supérieure, donc si, à la date t_f à laquelle $x(t_f) = d$, $z(t_f) < \frac{b}{2}$. L'expression de $x(t)$ permet d'exprimer $t_f = \frac{d}{v_0}$. La condition est donc

$$z\left(t = \frac{d}{v_0}\right) < b \Leftrightarrow \frac{eE}{2m} \cdot \left(\frac{d}{v_0}\right)^2 < b \quad \text{soit} \quad \frac{eEd^2}{2mv_0^2} < \frac{b}{2}$$

3. Si la force de Lorentz à $t = 0$ est nulle, l'accélération du proton est nulle, donc sa vitesse reste constante égale à $\vec{v}_0$ et la force de Lorentz restera donc nulle : le proton aura un mouvement rectiligne uniforme.

$$\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = \vec{0} \text{ si } \vec{B} = -\frac{E}{v_0}\vec{u}_y$$

La condition obtenue est indépendante de la charge et de la masse de la particule, mais dépend de la vitesse :
- si un proton est plus rapide que v_0, la force de Lorentz magnétique est supérieure à la force électrique et il est dévié vers $z < 0$;
- si un proton est moins rapide que v_0, la force de Lorentz magnétique est inférieure à la force électrique et il est dévié vers $z > 0$.

On a donc réalisé un filtre de vitesse.

4. Mouvement dans un champ magnétique pur.
   (a) La démonstration est du ressort du cours de MPSI. On peut trouver rapidement le rayon si on a établi que le mouvement est circulaire uniforme. En effet, la loi de la quantité de mouvement, en projection sur $\vec{u}_r$, s'écrit :

$$ev_0B = m\frac{v_0^2}{R} \quad \text{soit} \quad R = \frac{mv_0}{eB}$$

Voici la démonstration complète.

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \quad \vec{v}\left|\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array}\right. \quad \vec{B}\left|\begin{array}{l} 0 \\ B \\ 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \vec{f}_L\left|\begin{array}{l} -eB\dot{z} \\ 0 \\ eB\dot{x} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \vec{a}\left|\begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array}\right.$$

La loi de la quantité de mouvement s'écrit $\vec{f}_L = m\vec{a}$ donc

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{eB}{m}\dot{z} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{eB}{m}\dot{x} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x} = -\frac{eB}{m}z + v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = \frac{eB}{m}x \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \ddot{x} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 x = 0 \\ y = 0 \\ \ddot{z} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 z + \frac{eBv_0}{m} \end{cases}$$

Le mouvement est donc dans le plan $y = 0$. Les deux équations du second ordre sont du type oscillateur harmonique ; on pose $\omega_0 = \frac{eB}{m}$ et

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ \dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z(t) = A'\cos(\omega_0 t) + B'\sin(\omega_0 t) + \frac{mv_0}{eB} \\ \dot{z}(t) = -A'\omega_0\sin(\omega_0 t) + B'\omega_0\cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} 0 = A \\ v_0 = B\omega_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 = A' + \frac{mv_0}{eB} \\ 0 = B'\omega_0 \end{cases}$$

donc $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{mv_0}{eB}\sin(\omega_0 t) \\ z(t) = \frac{mv_0}{eB} - \frac{mv_0}{eB}\cos(\omega_0 t) \end{array} \right.$ donc $[x(t)]^2 + \left[z(t) - \dfrac{mv_0}{eB}\right]^2 = \left[\dfrac{mv_0}{eB}\right]^2$

qui est bien l'équation cartésienne d'un cercle de rayon centre $\Omega \left| \begin{array}{l} x_\Omega = 0 \\ y_\Omega = \frac{mv_0}{eB} \end{array} \right.$ et de rayon $R_0 = \frac{mv_0}{eB}$.

(b) La loi de la quantité de mouvement donne, en projection sur les axes x et z, les mêmes équations ; en projection sur y, on obtient

$$\ddot{y} = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{y} = v_1 \quad \text{et} \quad y(t) = v_1 t$$

Le mouvement est donc la conjugaison d'un mouvement circulaire uniforme selon x et z et d'un mouvement de déplacement à vitesse constante selon y : c'est un mouvement hélicoïdal.

(c) En présence d'un champ $\vec{E} = E\vec{u}_z$, les projections de la loi de la quantité de mouvement sont modifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{eB}{m}\dot{z} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{eB}{m}\dot{x} + \frac{eE}{m} \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\frac{eB}{m}z + v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = \frac{eB}{m}x + \frac{eE}{m}t \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 x = -\frac{e^2EB}{m^2}t \\ y = 0 \\ \ddot{z} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 z + \frac{eBv_0}{m} + \frac{eE}{m} \end{array} \right.$$

La résolution est donc analogue au cas où $E = 0$ mais il apparaîtra dans la solution particulière de l'équation en $x(t)$ un terme affine du temps : le mouvement est donc la conjugaison d'un mouvement circulaire uniforme selon x et z et d'un mouvement de déplacement à vitesse constante selon x : c'est un mouvement cycloïdal.

Exercice 6 **Résistance en géométrie non prismatique**

1. On utilise la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, la loi de conservation de la charge div $\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et l'équation de Maxwell-Gauss div $\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$: il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

dont la solution est $\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \simeq 10^{-19}$ s ; ρ devient donc nulle au bout de $5\tau \simeq 5 \cdot 10^{-19}$ s. Par suite $\rho \simeq 0$ si $T \gg \tau$.

2. En régime permanent,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \quad \text{et} \quad \text{div}\, \vec{j} = 0 \quad \text{donc} \quad \text{div}\, \vec{E} = 0$$

d'où div $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = 0$ soit $\Delta V = 0$.

3. En coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\text{donc} \quad V(\theta) = C\theta + D$$

Or $V(0) = U$ et $V(\alpha) = 0$ donc $D = U$ et $C = -\frac{U}{\alpha}$ d'où

$$V(\theta) = -\frac{U}{\alpha}\theta + U$$

4. On en déduit

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta = \frac{U}{r\alpha}\vec{u}_\theta$$

$$\text{et} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma U}{r\alpha}\vec{u}_\theta$$

Par définition, $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ soit

$$I = \int_{r=a}^{b} \int_{z=0}^{c} \frac{\gamma U}{r\alpha} dr dz = \frac{\gamma c}{\alpha} \ln \frac{b}{a} U$$

5. Par suite, la loi d'Ohm $U = RI$ donne

$$R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln \frac{b}{a}}$$

Exercice 7 $\boxed{\textbf{Coup de foudre}}$

1. Posons $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$. Par définition, si Σ est la demi-sphère de centre O et de rayon r :

$$I = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_\Sigma -j(r)dS = -j(r) \cdot 2\pi r^2 \quad \text{donc} \quad j(r) = \frac{-I}{2\pi r^2}$$

2. La loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ donnent :

$$\vec{E} = -\frac{I}{2\pi\gamma r^2}\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dr} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2} \quad \text{donc} \quad V(r) = -\frac{I}{2\pi\gamma r}$$

3. On en déduit que

$$U = V(r_D) - V(r_G) = -\frac{I}{2\pi\gamma r_D} + \frac{I}{2\pi\gamma r_G} = \frac{Ip}{2\pi\gamma(d^2+dp)} \simeq \frac{Ip}{2\pi\gamma d^2}$$

4. L'application numérique donne $U = 120$ V. On a intérêt à s'éloigner de l'arbre (augmentation de d) et à serrer les pieds (diminution de p). Les vaches cherchent à s'abriter de la pluie, donc se rapprochent de l'arbre et leurs pattes sont plus éloignées que les jambes d'un homme.

Exercice 8 **Étude d'une plaque épaisse**

1. En prenant $\vec{B} = B(z)\vec{u}_y$, on vérifie immédiatement l'équation de Maxwell-Thomson :

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial B(z)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0$$

L'équation de Maxwell-Ampère en régime permanent s'écrit, pour $z \in [0, a]$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{soit} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} 0 \\ B(z) \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} mu_0 j_0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad -B'(z) = \mu_0 j_0$$

On en déduit que $B(z) = -\mu_0 j_0 z + K$ et la condition $B(0) = 0$ donne $K = 0$. Pour $z > a$, $\vec{j} = \vec{0}$ donc

$$-B'(z) = 0 \quad \text{donc} \quad B(z) = L$$

La continuité de B en $z = a$ donne

$$B(a^-) = B(a^+) \quad \text{soit} \quad -\mu_0 j_0 a = L$$

En somme : $\vec{B} = -\mu_0 j_0 z \vec{u}_y$ si $z \leq a$ et $\vec{B} = -\mu_0 j_0 a \vec{u}_y$ si $z > a$.

2. Le champ électrique est donné par la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{donc} \quad \vec{E} = \left| \begin{array}{l} \frac{j_0}{\gamma} \text{ si } z \leq a \\ 0 \text{ si } z > a \end{array} \right.$$

Le vecteur de Poynting vaut donc

$$\vec{\Pi} = \left| \begin{array}{l} -\frac{j_0^2 z}{\gamma}\vec{u}_z \text{ si } z \leq a \\ \vec{\Pi} = -\frac{j_0^2 a}{\gamma}\vec{u}_z \text{ si } z < a \end{array} \right.$$

On est en régime permanent donc u_{em} est constante et l'équation de Poynting s'écrit

$$\text{div } \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

– Pour $z \leq a$,

$$\text{div } \vec{\Pi} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{j_0^2 z}{\gamma}\right] = -\frac{j_0^2}{\gamma} \quad \text{et} \quad \vec{j} \cdot \vec{E} = j_0 \vec{u}_x \cdot \frac{j_0}{\gamma}\vec{u}_x = \frac{j_0^2}{\gamma}$$

– Pour $z > a$, $\vec{Pi}$ est constant donc div $\vec{\Pi} = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$.

3. La puissance Joule volumique est

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j_0^2}{\gamma} \quad \text{donc} \quad \mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{8a^3 j_0^2}{\gamma}$$

Exercice 9 $\boxed{\textbf{Étude énergétique de la loi d'Ohm}}$

1. La loi d'Ohm locale donne
$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \gamma E \vec{u}_z$$
L'équation de Maxwell-Ampère en régime permanent et en coordonnées cylindriques donne
$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \gamma E \vec{u}_z \quad \text{donc} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial rB(r)}{\partial r} = \mu_0 \gamma E \quad \text{donc} \quad \vec{B} = \mu_0 \gamma E \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$
On en déduit
$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{\gamma E^2 r}{2} \vec{u}_r$$
2. Le flux du vecteur de Poynting (radial) à travers les faces planes (de vecteur surface axial) est nul. On calcule donc le flux à travers la paroi latérale :
$$\oiint \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint -\frac{\gamma E^2 r_0}{2} \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = -\gamma E^2 \pi r_0^2 h$$
3. On est en régime permanent donc U_{em} = cste et sa dérivée par rapport au temps est nul. L'équation intégrale de Poynting s'écrit donc
$$\oiint \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} = -\iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$
Le premier terme a été calculé à la question précédente. Calculons le second :
$$-\iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = -\iiint \gamma E^2 d\tau = -\gamma E^2 \cdot \pi r_0^2 h$$
donc l'équation est bien vérifiée.