Chapitre 1

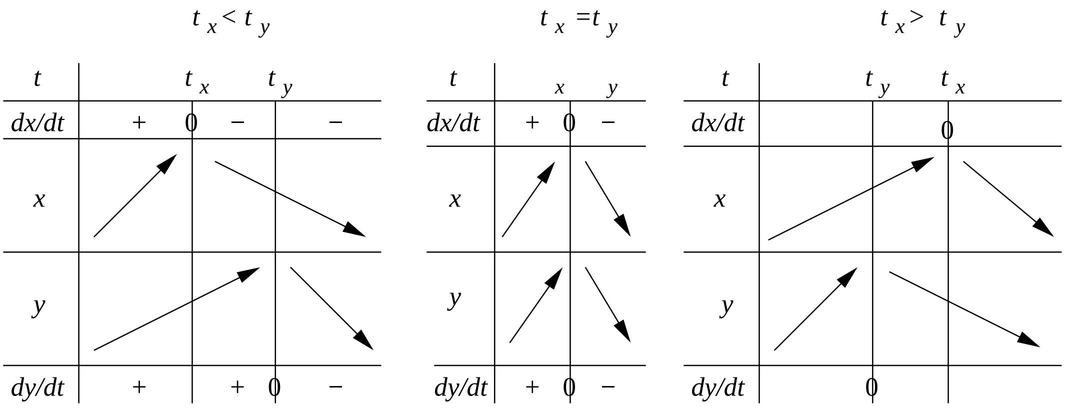
Mécanique du point

Exercice 1 **Détermination de trajectoires**

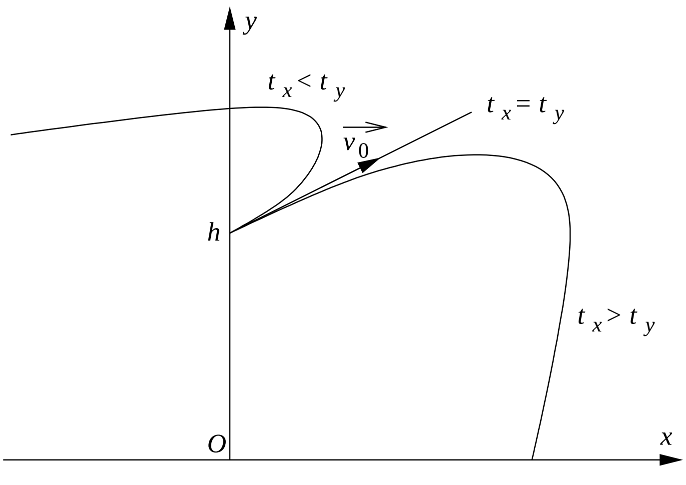
1. Par primitivations successives :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}\ddot{x}=-b\\ \ddot{y}=-g\end{array}\right.,\quad \vec{v}\left|\begin{array}{l}\dot{x}=-bt+v_0\cos\alpha\\ \dot{y}=-gt+v_0\sin\alpha\end{array}\right.\quad\text{et}\quad \overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}x(t)=-\frac{1}{2}bt^2+v_0\cos\alpha t\\ y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha t+h\end{array}\right.$$

2. $\dot{x}=0$ pour $t=t_x=\frac{v_0\cos\alpha}{b}$ et $\dot{y}=0$ pour $t=t_y=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$. Les trois cas correspondent donc aux positions relatives de t_x et de t_y.



3. L'accélération verticale $\ddot{y}=-g$ est celle de la pesanteur ; l'accélération horizontale $\ddot{x}=-b$ est associée à une force horizontale constante qui peut être celle du vent. Les trois allures des trajectoires sont les suivantes :



4. Notons M_0 la position initiale, $\vec{v}_0$ le vecteur-vitesse initial et $\vec{a}_0$ le vecteur-accélération supposé constant. Si $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{a}_0$, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré selon cet axe. S'ils ne sont pas colinéaires, dans le plan $(M_0,\vec{v}_0,\vec{a}_0)$, soit $\vec{u}_y=\frac{\vec{a}_0}{a_0}$, $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_y$. Notons $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire normal au plan tel que $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ forme un trièdre orthonormal direct. Le vecteur-vitesse initial a pour composantes $\vec{v}_0\left|\begin{array}{l}v_{0x}\\ v_{0y}\\ 0\end{array}\right.$.

   On en déduit

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=a_0\\ \ddot{z}=0\end{array}\right.,\quad \vec{v}\left|\begin{array}{l}\dot{x}=v_{0x}\\ \dot{y}=a_0t+v_{0y}\\ \dot{z}=0\end{array}\right.\quad\text{et}\quad \overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}x(t)=v_{0x}t\\ y(t)=\frac{1}{2}a_0t^2+v_{0y}t\\ z(t)=0\end{array}\right.$$

   ce qui prouve que la trajectoire est une parabole dans le plan $z=0$ d'équation

$$y=\frac{a_0}{2v_{0x}^2}x^2+\frac{v_{0y}}{v_{0x}}x$$

Exercice 2 $\boxed{\textbf{Mouvement spiral}}$

1. En primitivant : $r(t) = v_0 t$ et $\theta(t) = \omega t$. En utilisant les formules du cours,

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v_0\vec{u}_r + v_0 t\omega\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\vec{u}_r + \left[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right]\vec{u}_\theta = -v_0 t\omega^2\vec{u}_r + 2v_0\omega\vec{u}_\theta$$

2. Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = r\cos\theta\vec{u}_x + r\sin\theta\vec{u}_y$ donc

$$x(t) = v_0 t\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y(t) = v_0 t\sin(\omega t)$$

3. r et θ augmentent donc le mouvement est spiral (rotation et éloignement simultanés). La norme de la vitesse est $\|\vec{v}\| = v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}$: elle augmente au cours du temps.

Exercice 3 $\boxed{\textbf{Chute libre avec frottement fluide}}$

1. $[\lambda] =$ kg $\cdot$ s^{-1}
2. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la pierre, en projection sur z, donne
$$m\ddot{z} = -\lambda\dot{z} - mg \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} = -g$$
3. Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\dot{z}$ devient constante : $\dot{z} = -v_{lim}$ et sa dérivée est donc nulle $\ddot{z} = 0$ (la pierre n'accélère plus). En remplaçant dans l'équation différentielle, il vient $-\frac{\lambda}{m}v_{lim} = -g$ soit $v_{lim} = \frac{mg}{\lambda}$.
4. L'équation caractéristique s'écrit $r^2 + 0,25r = 0$ soit $r = 0$ ou $r = -0,25$ donc $z_H = a + be^{-0,25t}$. En injectant dans l'équation différentielle, $0 + \frac{\lambda}{m}A = -g$ donc $A = -v_{lim} = -40$ m $\cdot$ s^{-1} et $z_P = -40t$.
5. $z(t) = z_H(t) + z_P(t) = a + be^{-0,25t} - 40t$ et $\dot{z}(t) = -0,25be^{-0,25t} - 40$ d'où le système donné par les conditions initiales : $a + b = H$ et $-0,25b - 40 = 0$ donc $a = 2660$ et $b = -160$ soit $z(t) = 2660 - 160e^{-0,25t} - 40t$ et $v(t) = 40\left(e^{-0,25t} - 1\right)$.
6. L'exponentielle $e^{-\frac{t}{\tau}}$ devient presque nulle au bout de 5τ donc ici au bout de 20 secondes.

Exercice 4 **Analyse graphique d'un frottement**

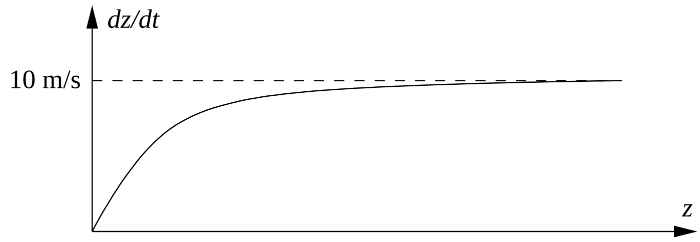
1. À $t = 0$, $v = 0$ donc $m\frac{dv}{dt} = mg$ et on lit $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. La vitesse limite est atteinte quand $\frac{dv}{dt} = 0$ et on lit $v_{\mathrm{lim}} = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
2. Le portrait est un segment de droite de pente 1,5 donc

$$\ln\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = 1,5\ln(v) \quad \text{donc} \quad g - \frac{dv}{dt} = Kv^{1,5}$$

La vitesse limite est atteinte quand $\frac{dv}{dt} = 0$, donc à l'extrémité en haut à droite du segment, de coordonnées $(\ln 10, \ln 10)$:

$$g - 0 = Kv_{\mathrm{lim}}^{1,5} \quad \text{donc} \quad K = \frac{g}{v_{\mathrm{lim}}^{1,5}} \quad \text{et} \quad g - \frac{dv}{dt} = g\frac{v^{1,5}}{v_{\mathrm{lim}}^{1,5}}$$

qui est bien l'équation cherchée.
3. La vitesse $\dot{z}$ croît au cours du temps en partant de 0 et tend vers v_{lim} ; z croît en partant de 0 pour tendre vers l'infini. d'où l'allure suivante :



4. On lit $v_0 = 5,0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
5. $\dot{v} < 10$ pour $v = 0$, la montée du mobile a pu perturber le fluide en créant un mouvement de celui-ci qui perdure lorsque le mobile redescend.

Exercice 5 $\boxed{\textbf{Tir vers le haut avec frottements}}$

On applique la loi de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point haut. La force de frottement et le poids sont constants et opposés au mouvement ascensionnel, leurs travaux sont donc négatifs :

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(H-h) - f(H-h) \quad \text{soit} \quad H = h + \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{mg+f}$$

On applique ensuite la même loi entre le haut et le sol :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = mgH - fH \quad \text{soit} \quad v_1 = \sqrt{2gH - 2\frac{fH}{m}}$$

Exercice 6 $\boxed{\textbf{Bille sur une sphère}}$

1. La réaction normale $\vec{N}$ du support ne travaille pas. En prenant $z = 0$ au centre de la sphère, l'altitude de M varie entre $z = r$ à l'instant initial et $z = r\cos\theta$ à la date t. La loi de l'énergie cinétique s'écrit donc
$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgr(1 - \cos\theta)$$

2. La loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit
$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$
Les lois de la cinématique donnent les composantes de $\vec{a}$ dans la base cylindrique et en projection sur l'axe $\overrightarrow{u}_r$, on obtient
$$N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{r}$$

3. Il y a décollage si $N = 0$ soit $mg\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$ et en utilisant la relation donnée par la loi de l'énergie cinétique : $m\frac{v^2}{r} = 2mg - 2mg\cos\theta$ d'où $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ soit $\theta_0 = 48,2°$.

Exercice 7 **Saut à l'élastique**

1. L'élastique commence à se tendre quand la distance entre le pont et le sauteur dépasse ℓ_0 donc quand $z < h - \ell_0$; dans ce cas, la longueur du ressort vaur $\ell = h - z$. On en déduit :
   * si $z \geq h - \ell_0$, seul le poids s'exerce et $Ep = Ep_p = mgz$;
   * si $z < h - \ell_0$, $Ep = Ep_p + Ep_\ell = mgz + \frac{1}{2}k(h - z - \ell_0)^2$.
2. Par application de la loi de conservation de l'énergie mécanique entre A ($z_A = h$, $v_A = 0$) et B ($z_B = z_0$, $v_B = 0$) :

$$mgh + \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgz_0 + \frac{1}{2}k(h - z_0 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}m \cdot 0^2$$

   Par application de la loi de conservation de l'énergie mécanique entre A ($z_A = h$, $v_A = 0$), et le sol en S ($z_S = 0$, v_C) :

$$mgh + \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mg \cdot 0 + \frac{1}{2}k(h - 0 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \text{soit} \quad v_C^2 = 2gh - \frac{k}{m}(h - 0 - \ell_0)^2$$

   Le sol ne sera jamais atteint si cette équation n'a pas de solution donc si (un carré est toujours positif)

$$2gh - \frac{k}{m}(h - \ell_0)^2 < 0 \quad \text{soit} \quad k > \frac{2mgh}{(h - \ell_0)^2} = 43,6\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

Exercice 8 $\boxed{\textbf{Trois méthodes pour le pendule simple}}$

Rappelons d'abord les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = L\vec{u}_r, \ \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

1. Le loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit, en notant T la tension du fil :

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T = -mL\dot{\theta}^2 \\ -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} \end{cases}$$

donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$.

2. La tension du fil, perpendiculaire au vecteur-vitesse, ne travaille pas. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique $Ec = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$ et de l'énergie potentielle de pesnateur $Ep = -mgL\cos\theta$ en prenant la référence à l'altitude de O :

$$Em = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta$$

Elle est constante donc sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$0 = \frac{1}{2}mL^2 \cdot 2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgL \cdot \dot{\theta}\sin\theta$$

donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$.

3. Par définition du moment cinétique et des moments des forces en O :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} = mL^2\dot{\theta}\vec{u}_z, \ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{P} = -mgL\sin\theta\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{T} = \vec{0}$$

La loi du moment cinétique appliquée à M dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \frac{d\vec{L}_O =}{dt} \quad \text{soit} \quad -mgL\sin\theta\vec{u}_z = mL^2\ddot{\theta}\vec{u}_z$$

donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$. Dans l'hypothèse des petits angles, $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation différentielle s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$. C'est une équation d'oscillateur harmonique dont les solutions sont sinusoïdales de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 0,89$ s.

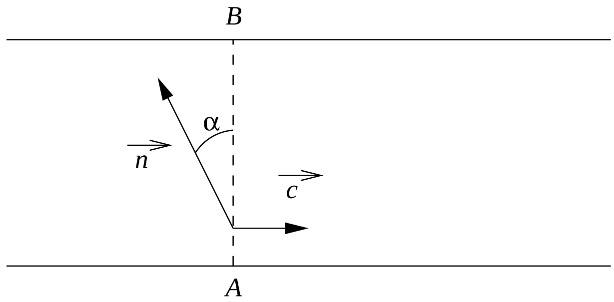
4. L'équation devient $\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$. Dans l'hypothèse des petits angles, en valeurs numériques : $\ddot{\theta} + 10\dot{\theta} + 50\theta = 0$. L'équation caractéristique s'écrit $r^2 + 10r + 50 = 0$, son discriminant est $\Delta = -100$ donc ses racines sont $r = -5 \pm 5j$. On est donc en régime pseudo-périodique et

$$\theta(t) = e^{-5t}\left[A\cos(5t) + B\sin(5t)\right]$$

Exercice 9 **Oscillations mécaniques forcées**

1. Dans le référentiel galiléen du laboratoire, le mobile subit les forces de rappel des deux ressorts, la réaction normale du support est compensée par le poids. La longueur du ressort de gauche est $\ell_g = x - (-x_1) = x + x_1$, donc son allongement vaut $(\ell_g - \ell_0) = x + x_1 - \ell_0 = x + X_1 \cos(\omega t)$; sur la figure, il est tendu, son allongement est positif et la force de rappel est dirigée vers la gauche donc sa composante sur l'axe (O, x) est négative. La longueur du ressort de droite est $\ell_d = x_1 - x$, donc son allongement vaut $(\ell_d - \ell_0) = x_1 - x - \ell_0 = X_1 \cos(\omega t) - x$; sur la figure, il est comprimé, son allongement est négatif et la force de rappel est dirigée vers la droite donc sa composante sur l'axe (O, x) est positive. La loi de la quantité de mouvement s'écrit :
$$-k_g(\ell_g - \ell_0) + k_d(\ell_d - \ell_0) - \alpha \dot{x} = m\ddot{x} \quad \text{donc} \quad m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (k_d + k_g)x = (k_d - k_g)X_1 \cos(\omega t)$$
2. En divisant par m et en remplaçant k_g et k_d, on peut écrire
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + 4\frac{k}{m}x = 2\frac{k}{m}X_1 \cos(\omega t) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + 4\omega_0\dot{x} + 4\omega_0^2 x = 2\omega_0^2 X_1 \cos(\omega t)$$
3. L'équation caractéristique s'écrit $z^2 + 4\omega_0 z + 4\omega_0^2 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 0$, il y a donc une racine double $z = -2\omega_0$ donc $x_H(t) = (At + B)e^{-2\omega_0 t}$ qui tend vers zéro quand $t \to \infty$. Le régime transitoire est donc limité dans le temps, et la solution en régime permanent est la solution particulière en régime sinusoïdal forcé.
4. On passe en formalisme complexe :
$$\left[-\omega^2 + 4j\omega\omega_0 + 4\omega_0^2\right] X_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = 2\omega_0^2 X_1 e^{j\omega t}$$
et en passant au module :
$$X_m = \frac{2\omega_0^2 X_1}{\sqrt{\left(4\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 16\omega_0^2\omega^2}} = \frac{2\omega_0^2 X_1}{\omega^2 + 4\omega_0^2}$$
5. X_m est une fonction strictement décroissante de ω, il n'y a donc pas de résonance en élongation.
6. En grandeurs complexes, $\underline{v_P} = j\omega \underline{x_P}$ donc en module, $V_m = \omega X_m = \frac{2\omega_0^2\omega}{\omega^2 + 4\omega_0^2} X_1$.
7. La dérivée vaut $\frac{dV_m}{d\omega} = \frac{2\omega_0^2(4\omega_0^2 - \omega^2)}{\left(\omega^2 + 4\omega_0^2\right)^2} X_1$. Elle s'annule pour $\omega = 2\omega_0$, valeur pour laquelle V_m passe par son maximum absolu : $V_m(2\omega_0) = \frac{\omega_0 X_1}{2}$. Il y a donc résonance en vitesse.

Exercice 10 $\boxed{\textbf{Nageur dans le courant}}$
Les notations sont celles du schéma suivant :



La loi de composition des vitesses s'écrit

$$\vec{v} = \vec{c} + \vec{n}$$

Le vecteur vitesse dans le référentiel de la berge est colinéaire à $[AB]$ donc $\sin\alpha = \frac{c}{n}$ soit $\alpha = 35°$.

Exercice 11 $\boxed{\textbf{Composition des vitesses, des accélérations}}$

1. On exprime : $\vec{u}_X = \cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y$. On en déduit

$$\vec{v}_r = v_0 \vec{u}_X = \left| \begin{array}{l} v_0 \cos(\omega t) \\ v_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{array} \right.$$

Par application de la formule du cours :

$$\vec{v}_e = \vec{0} + \omega \vec{u}_z \wedge v_0 t \vec{u}_X = \left| \begin{array}{l} -v_0 \omega t \sin(\omega t) \\ v_0 \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{array} \right.$$

On en déduit $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \left| \begin{array}{l} v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t) \\ v_0 \sin(\omega t) + v_0 \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{array} \right.$.

2. Dans $\mathcal{R}'$, le promeneur a une vitesse constante donc $\vec{a}_r = \vec{0}$. Par application des formules du cours :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \cdot v_0 t \vec{u}_X = \left| \begin{array}{l} -v_0 \omega^2 t \cos(\omega t) \\ -v_0 \omega^2 t \sin(\omega t) \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{a}_c = 2\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}_r = \left| \begin{array}{l} -2v_0 \omega \sin(\omega t) \\ 2v_0 \omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{array} \right.$$

3. $\overrightarrow{OM} = v_0 t \vec{u}_X$ donc $\left| \begin{array}{l} x(t) = v_0 t \cos(\omega t) \\ y() = v_0 t \sin(\omega t) \\ 0 \end{array} \right.$.

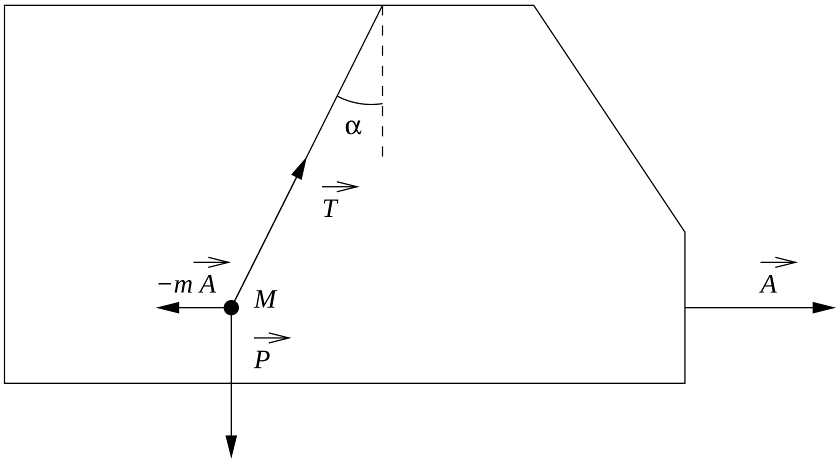
4. En dérivant par rapport au temps :

$$\vec{v}_a = \left| \begin{array}{l} v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t) \\ v_0 \sin(\omega t) + v_0 \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{a}_a = \left| \begin{array}{l} -v_0 \omega^2 t \cos(\omega t) - 2v_0 \omega \sin(\omega t) \\ -v_0 \omega^2 t \sin(\omega t) + 2v_0 \omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{array} \right.$$

donc $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ et $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$.

Exercice 12 $\boxed{\textbf{Inclinaison d'un pendule}}$

1. Dans le référentiel non galiléen du train, M est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la tension du fil $\vec{T}$ et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f_{ie}} = -mA\vec{u}_x$.

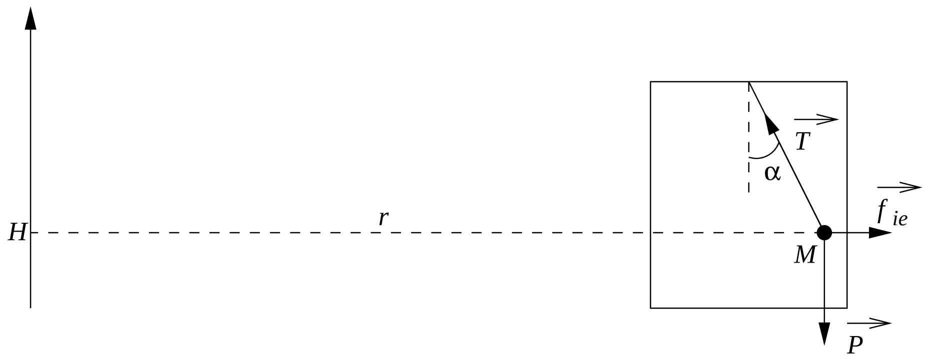


La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f_{ie}} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 0 + T\sin\alpha - mA = 0 \\ -mg + T\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T\sin\alpha = mA = 0 \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$$

On élimine T en divisant ces deux égalités : $\tan\alpha = \frac{A}{g}$.

2. Dans le référentiel non galiléen du manège, M est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la tension du fil $\vec{T}$ et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f_{ie}} = m\omega^2\overrightarrow{HM} \simeq m\omega^2 r\vec{u}_r$. Comme M est immobile dans le référentiel du manège, sa vitesse relative $\vec{v}_r$ est nulle et la force d'inertie de Coriolis est nulle.



La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f_{ie}} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 0 - T\sin\alpha + m\omega^2 r = 0 \\ -mg + T\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T\sin\alpha = m\omega^2 r = 0 \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$$

On élimine T en divisant ces deux égalités : $\tan\alpha = \frac{r\omega^2}{g}$.

Exercice 13 **Mouvements d'une masse sur un guide rectiligne**

1. Dispositif en translation accélérée.
   (a) Dans le référentiel non galiléen du train, M est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_z$, la force normale de la tige $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{u}_z$ et la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f}_{ie} = -m\overrightarrow{A} = mA\overrightarrow{u}_x$. La loi de la quantité de mouvement s'écrit
   $$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{f}_{ie} = m\overrightarrow{a} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} mA = m\ddot{x} \\ -mg + R = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \ddot{x} = A$$
   (b) Par intégration $\dot{x} = At$ et $x = \frac{1}{2}At^2$.
   (c) $x = L$ donne $t_f = \sqrt{2LA} = 1,0$ s.
   (d) À cette date, $\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N = mg = 1,0 \text{ N} \end{vmatrix}$.
2. Dispositif en rotation uniforme.
   (a) Dans le référentiel non galiléen de la tige, M est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_z$, à la réaction normale de la tige $\overrightarrow{N} = N_y\overrightarrow{u}_y + N_z\overrightarrow{u}_z$, à la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{OM} = m\omega^2 x\overrightarrow{u}_x$ et à la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f}_{ic} = -2m\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v} = -2m\omega\dot{x}\overrightarrow{u}_y$. La loi de la quantité de mouvementy s'écrit
   $$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{f}_{ie} + \overrightarrow{f}_{ic} = m\overrightarrow{a} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -2m\omega\dot{x} + N_y = 0 \\ -mg + N_z = 0 \\ m\omega^2 x = m\ddot{x} \end{cases}$$
   d'où $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$.
   (b) L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - \omega^2 = 0$ soit $r = \pm\omega$, donc
   $$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}$$
   Les conditions initiales donnent $A + B = 0$ et $A\omega - B\omega = v_0$ donc $A = \frac{v_0}{2\omega}$ et $B = -\frac{v_0}{2\omega}$ d'où
   $$x = \frac{v_0}{2\omega}\left[e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right] = \frac{v_0}{\omega}\text{sh}(\omega t)$$
   (c) $x = L$ donne $e^{\omega t} - e^{-\omega t} = \frac{2\omega L}{v_0} = 1,5$ soit $E - \frac{1}{E} = 1,5$ soit $E^2 - 1,5E - 1 = 0$ de solution positive $E = 2,0$ donc $t_f = \frac{\ln 2}{\omega} = 4,6$ s. $\dot{x} = \frac{v_0}{2}\left[e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right] = \frac{v_0}{2}\left[E + \frac{1}{E}\right] = 0,25\ \text{m}\cdot\ \text{s}^{-1}$.
   (d) À cette date, $\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} 0 \\ N_y = 2m\omega\dot{x} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ N} \\ N_z = mg = 1,0 \text{ N} \end{vmatrix}$.

Exercice 14 $\boxed{\textbf{Rodéo vertical}}$

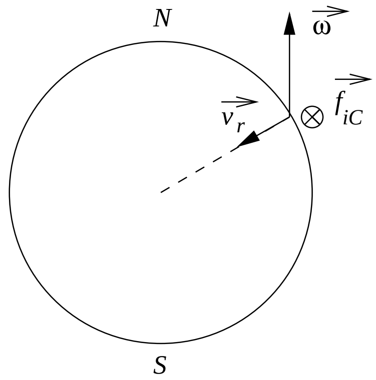
1. Le système {A,B} est soumis au poids et à la force du ressort dans le référentiel galiléen du laboratoire donc $-(M+m)g - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$ soit $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{(M+m)g}{k}$.
2. Dans le référentiel galiléen du laboratoire, la loi de la quantité de mouvement appliquée au système {A,B} s'écrit $-(M+m)g - k(z - \ell_0) = (M+m)\ddot{z}$ soit $\ddot{z} + \frac{k}{M+m}z = \frac{k}{M+m} \cdot \left(\ell_0 - \frac{(M+m)g}{k}\right)$ On en déduit $z(t) = \ell_{eq} + a\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$.
3. On étudie maintenant A dans le référentiel non galiléen de B : il est soumis à son poids, à la réaction de B sur A et à la force d'inertie d'entraînement

$$\overrightarrow{f}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_e = -m\overrightarrow{a}(B) = -m\ddot{z}\overrightarrow{u}_z = ma\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi)\overrightarrow{u}_z$$

On se place à la limite du décollage : A est donc immobile dans le référentiel de B donc la loi de la quantité de mouvement s'écrit $-mg + R + ma\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$ soit $R = mg - ma\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Il y aura non décollage si $\forall t$, $R > 0$: il suffit pour cela que cette inégalité soit vérifiée quand le cosinus vaut sa valeur maximale de $+1$, d'où $mg - ma\omega_0^2 > 0$ soit $a < \frac{g}{\omega^2}$ soit $a < \frac{(M+m)g}{k}$.

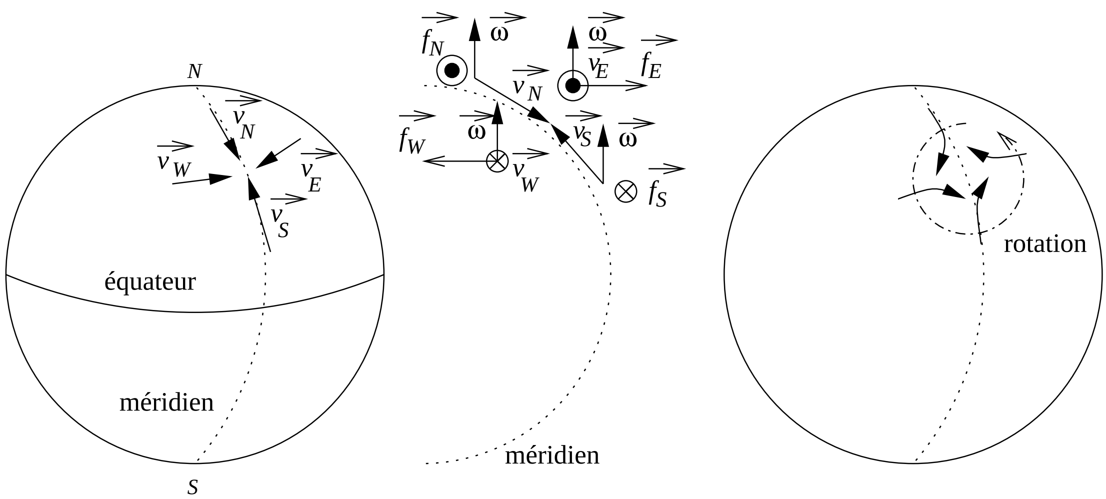
Exercice 15 **Effets terrestres de la force de Coriolis**

1. Sous l'action du poids, la pierre tombe verticalement ; tant que la vitesse reste faible, la force d'inertie de Coriolis est faible devant le poids et le vecteur vitesse $\vec{v}_r$ de la pierre dans le référentiel terrestre est sensiblement vertical dirigé vers le bas. Le vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre est dirigé du pôle sud vers le pôle nord. On en déduit la direction et le sens de $\vec{f}_{iC} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$:



La pierre est donc déviée vers l'est.

2. Voici la construction des vecteurs force de Coriolis pour les vents venant du nord (N), de l'ouest (W), du sud (S) et de l'est (E).



Le vent du nord est donc dévié vers l'ouest, le vent d'ouest vers le sud, le vent du sud vers l'est et le vent d'est vers le nord. On en déduit que les vents tournent dans le sens anti-horaire (trigonométrique) vu depuis le ciel autour du minimum dépressionnaire. C'est le sens contraire pour un anticyclone.

3. La France est située sur le 45-ième parallèle. Pour un TGV circulant vers le nord entre Lyon et Paris, l'angle entre $\vec{\omega}$ et $\vec{v}_r$ vaut donc $\frac{\pi}{4}$. La force de Coriolis est dirigée vers l'est et sa norme est

$$\|\vec{f}_{iC}\| = 2m\omega v \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 2\ 600 \text{ N}$$

Cette force produit un appui plus important sur le rail droit que sur le rail gauche qui pourrait provoquer une usure plus importante de ce rail. Remarquons qu'entre Paris et Lyon, la force est dirigée vers l'est et c'est donc là-encore le rail droit qui subit un appui plus important.

4. Lorsque le réservoir se vide, l'eau converge vers le centre, comme les vents convergent vers le centre de la dépression à la première question. Estimons la force de Coriolis subie par une particule de fluide qui se déplace d'un point M à la périphérie du réservoir vers le centre O

du réservoir. Supposons qu'on se trouve à dix mètres au nord de l'équateur, que M est au nord de O, et que la particule se déplace horizontalement à $v_r = 1~\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Le rayon de la Terre valant environ 6 400 km, l'angle entre $\vec{\omega}$ et $\vec{v}_r$ vaut $\alpha = \frac{10}{6{,}4 \cdot 10^6} = 1,6 \cdot 10^{-6}$ rad. La force de Coriolis a pour norme $\|\vec{f}_{iC}\| = 2m\omega v \cdot \sin\alpha$ donc le rapport entre cette force et le poids vaut

$$\frac{f_{iC}}{P} = \frac{2m\omega v \cdot \sin\alpha}{mg} = \frac{2\omega v \cdot \sin\alpha}{g} = 2,3 \cdot 10^{-11}$$

L'effet de la force de Coriois est donc totalement négligeable et les animateurs trichent : pour mieux montrer le sens de rotation de l'eau, ils déposent une petite brindille à la surface, et en la déposant, ils donnent discrètement une impulsion qui provoque la rotation dans le sens attendu (trigonométrique dans l'hémisphère sud, horaire dans l'hémisphère nord).

Exercice 16 $\boxed{\textbf{Forces de marée lunaires}}$

1. Dans le référentiel $\mathcal{R}_{TL}$ non galiléen, la loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$-\frac{\mathcal{G}m_Tm_L}{r_L^2}\overrightarrow{u}_x + m_L\omega^2 r_L\overrightarrow{u}_x = \overrightarrow{0} \quad \text{donc} \quad r_L\omega^2 = \frac{\mathcal{G}m_T}{r_L^2}$$

2. Par application des lois du cours :

$$\overrightarrow{f}_{T-Z} = -\frac{\mathcal{G}m_Tm}{(r_L-R_L)^2}\overrightarrow{u}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{f}_{T-E} = -\frac{\mathcal{G}m_Tm}{(r_L+R_L)^2}\overrightarrow{u}_x$$

$$\overrightarrow{f}_{L-Z} = \frac{\mathcal{G}m_Lm}{R_L^2}\overrightarrow{u}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{f}_{L-E} = -\frac{\mathcal{G}m_Lm}{R_L^2}\overrightarrow{u}_x$$

$$\overrightarrow{f}_{ieZ} = m\omega^2(r_L-R_L)\overrightarrow{u}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{f}_{ieE} = m\omega^2(r_L+R_L)\overrightarrow{u}_x$$

3. En sommant les deux forces :

$$\overrightarrow{f}_m(Z) = -\frac{\mathcal{G}m_Tm_L}{(r_L-R_L)^2}\overrightarrow{u}_x + m\omega^2(r_L-R_L)\overrightarrow{u}_x$$

Or $r_L\omega^2 = \frac{\mathcal{G}m_T}{r_L^2}$ donc

$$\overrightarrow{f}_m(Z) = -m\omega^2 r_L\frac{r_L^2}{(r_L-R_L)^2} + m\omega^2 r_L\frac{r_L-R_L}{r_L}\overrightarrow{u}_x = m\omega^2 r_L\left[\frac{r_L-R_L}{r_L} - \frac{r_L^2}{(r_L-R_L)^2}\right]\overrightarrow{u}_x$$

De même

$$\overrightarrow{f}_m(E) = -m\omega^2 r_L\frac{r_L^2}{(r_L+R_L)^2} + m\omega^2 r_L\frac{r_L+R_L}{r_L}\overrightarrow{u}_x = m\omega^2 r_L\left[\frac{r_L+R_L}{r_L} - \frac{r_L^2}{(r_L+R_L)^2}\right]\overrightarrow{u}_x$$

4. On peut écrire $\frac{r_L-R_L}{r_L} = 1 - \frac{R_L}{r_L}$ et par développement limité :

$$\frac{r_L^2}{(r_L-R_L)^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{R_L}{r_L}\right)^2} \simeq 1 + 2\frac{R_L}{r_L}$$

$$\text{donc} \quad \overrightarrow{f}_m(Z) \simeq -3m\omega^2 R_L\overrightarrow{u}_x$$

est opposée à l'attraction lunaire en Z. De même

$$\overrightarrow{f}_m(E) \simeq 3m\omega^2 R_L\overrightarrow{u}_x$$

est opposée à l'attraction lunaire en E. L'application numérique donne $f_m(Z) = f_m(E) = 3,62\cdot 10^{-5}$ N très inférieure au poids lunaire de $1,62$ N.

Exercice 17 $\boxed{\textbf{Tir d'un obus vers le zénith}}$

On peut écrire dans le référentiel terrestre, en posant $C = \cos\lambda$ et $S = \sin\lambda$:

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \quad \overrightarrow{\omega}\left|\begin{array}{l} -\omega C \\ 0 \\ \omega S \end{array}\right. \quad \overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array}\right. \quad \overrightarrow{a}\left|\begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array}\right. \quad \overrightarrow{P}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -mg \end{array}\right. \quad \overrightarrow{f}_{ic} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

On en déduit le système d'équations différentielles vérifiées par x, y, z :

$$\left\{\begin{array}{l} m\ddot{x} = 2m\omega S\dot{y} \\ m\ddot{y} = -2m\omega S\dot{x} - 2m\omega C\dot{z} \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega C\dot{y} \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = 2\omega S y \\ \ddot{y} = -2\omega S\dot{x} - 2\omega C\dot{z} \\ \dot{z} = -gt + 2\omega C y + v_0 \end{array}\right.$$

On remplace $\dot{x}$ et $\dot{z}$ par leurs expressions dans la deuxième équation, il vient :

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y = 2\omega C g t - 2\omega C v_0$$

La solution particulière est

$$y_P(t) = \frac{Cg}{2\omega}t - \frac{Cv_0}{2\omega}$$

L'équation homogène est du type oscillateur harmonique donc

$$y_H(t) = A\cos(2\omega t) + B\sin(2\omega t)$$

La solution générale s'écrit donc

$$\left\{\begin{array}{l} y(t) = A\cos(2\omega t) + B\sin(2\omega t) + \frac{Cg}{2\omega}t - \frac{Cv_0}{2\omega} \\ \dot{y}(t) = -2\omega A\sin(2\omega t) + 2\omega B\cos(2\omega t) + \frac{Cg}{2\omega} \end{array}\right.$$

Les conditions initiales donnent le système

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = A - \frac{Cv_0}{2\omega} \\ 0 = 2\omega B + \frac{Cg}{2\omega} \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} A = \frac{Cv_0}{2\omega} \\ B = -\frac{Cg}{4\omega^2} \end{array}\right.$$

$$\text{donc} \quad y(t) = \frac{Cv_0}{2\omega}\cos(2\omega t) - \frac{Cg}{4\omega^2}\sin(2\omega t) + \frac{Cg}{2\omega}t - \frac{Cv_0}{2\omega}$$