Chapitre 3

Traitement du signal

Exercice 1 **Valeur moyenne, valeur efficace d'une tension créneaux**

1. Par définition de la valeur moyenne :

$$< u >= \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} u(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_{t=0}^{\alpha T} 10 \cdot dt + \int_{t=\alpha T}^{T} 0 \cdot dt\right]$$

$$\text{soit} \quad < u >= \frac{1}{T}\left[10\alpha T + 0\right] = 10\alpha$$

2. Par définition de la valeur efficace :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_{t=0}^{\alpha T} 100 \cdot dt + \int_{t=\alpha T}^{T} 0 \cdot dt\right]}$$

$$\text{soit} \quad U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[100\alpha T + 0\right]} = \sqrt{100\alpha} = 10\sqrt{\alpha}$$

Exercice 2 **Analyseur de spectre**

1. L'homogénéité de la relation donne

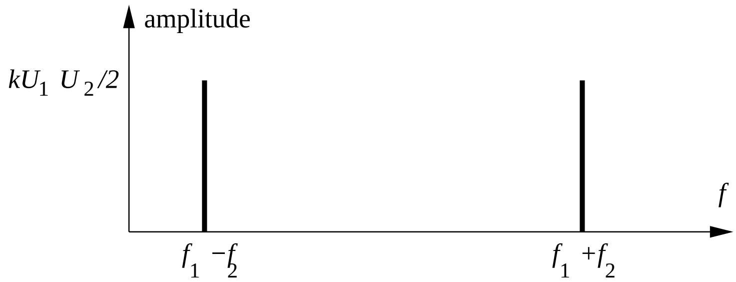
$$\mathrm{V} = [k] \cdot \mathrm{V}^2 \quad \text{donc} \quad [k] = \mathrm{V}^{-1}$$

2. On exprime $u_m(t)$ en utilisant la formule de trigonométrie fournie :

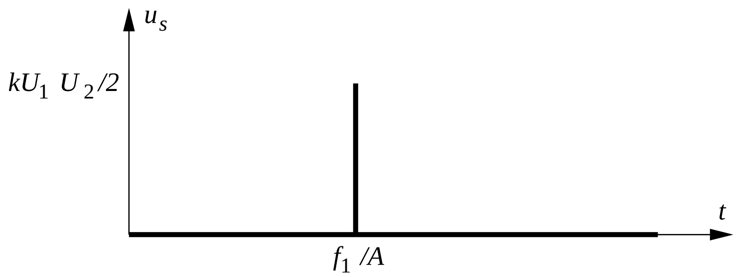
$$u_m(t) = kU_1 \cos(2\pi f_1 t) U_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

$$\text{soit} \quad u_m(t) = \frac{kU_1U_2}{2} \cos\left[2\pi(f_1 + f_2)t + \varphi_2\right] + \frac{kU_1U_2}{2} \cos\left[2\pi(f_1 - f_2)t - \varphi_2\right]$$

Le spectre fait donc apparaître les deux fréquences $f_1 - f_2$ et $f_1 + f_2$, de même amplitude $\frac{kU_1U_2}{2}$:



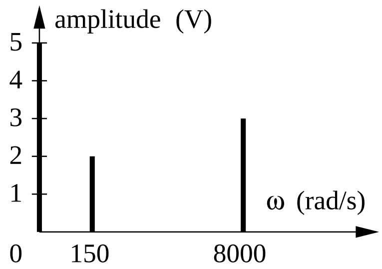
3. Le passe-bas étant de fréquence de coupure très basse, il ne laisse passer que la composante harmonique de fréquence $f_1 - f_2 \simeq 0$, donc $u_s(t)$ est nul sauf si $f_1 = f_2$.
4. u_s est non nul lorsque $At = f_1$ donc à la date $t = \frac{f_1}{A}$. À cette date, $f_2 = f_1$ et u_s est égale à la composante continue est $u_m(t)$, soit $\frac{kU_1U_2}{2}$. L'allure du graphe enregistré sur l'écran est donc :

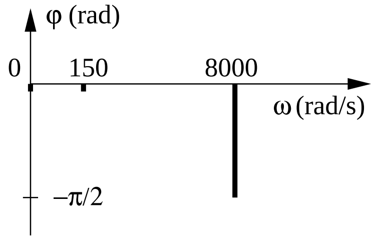


5. Le signal périodique d'entrée se décompose en somme de signaux sinusoïdaux de fréquences $n \cdot f_1$ et d'amplitudes U_{1n}, n étant un entier naturel non nul. Le graphe enregistré sur l'écran de l'oscilloscope fera donc apparaître un pic de hauteur $kU_2 \cdot U_{1n}$ aux dates $t_n = \frac{n \cdot f_1}{A}$. La courbe est donc exactement homothétique au spectre, avec un facteur kU_2 en ordonnées, et un facteur $\frac{1}{A}$ en abscisses.

Exercice 3 **Déformation d'un signal**

1. On peut écrire
$$u_e(t) = 5\cos(0 \cdot t) + 2\cos(150t) + 3\cos\left(8000t - \frac{\pi}{2}\right)$$
Voici donc l'allure des spectres en amplitude et en phase :





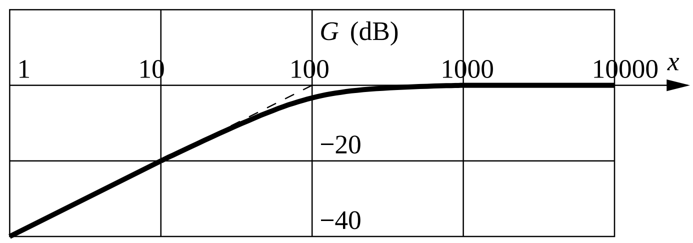
2. En appliquant la loi du diviseur de tension :
$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1}$$

– À basse fréquence, la fonction de transfert équivalente est le rapport des termes de plus bas degré :
$$\underline{H}_{BF} = \frac{jRC\omega}{1} = jRC\omega \quad \text{donc} \quad \begin{cases} H_{BF} = RC\omega \quad \text{et} \quad G_{BF} = 20\log(RC\omega) \\ \varphi_{BF} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

– À haute fréquence, la fonction de transfert équivalente est le rapport des termes de plus haut degré :
$$\underline{H}_{HF} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega} = 1 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} H_{HF} = 1 \quad \text{et} \quad G_{HF} = 0 \\ \varphi_{BF} = 0 \end{cases}$$

– Les asymptotes se croisent quand $H_{BF} = H_{HF}$ soit $RC\omega = 1$ soit $\omega^* = \frac{1}{RC} = 100\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour cette valeur :
$$\underline{H}^* = \frac{j}{j+1} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} H^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad G_{HF} = -10\log 2 = -3\ \text{dB} \\ \varphi_{BF} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Le filtre est donc un filtre passe-haut de pulsation de coupure à -3 dB $\omega^* = 100\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Voici l'allure du diagramme de Bode en gain :



3. Chacun des trois termes harmoniques du signal d'entrée subit une modification de son amplitude (multipliée par le module de $\underline{H}$) et de sa phase (augmentée de l'argument de $\underline{H}$) :

ω	0	150	8000
$\underline{H}$	0	$\frac{1{,}5j}{1{,}5j+1}$	1
$H = \lvert\underline{H}\rvert$	0	$0{,}832$	1
$\varphi = \arg(\underline{H})$	0	$0{,}588$	0

On en déduit que

$$u_s(t) = 0 \times 5 + 0,832 \times 2\cos(150t + 0,588) + 1 \times 3\cos\left(8000t - \frac{\pi}{2} + 0\right)$$

$$\text{soit} \quad u_s(t) = 1,66\cos(150t + 0,588) + 3\sin(8000t)$$

4. L'impédance équivalente de l'association parallèle de la résistance et de la bobine est

$$\underline{Z} = \frac{R \times jL\omega}{R + jL\omega}$$

En appliquant la loi du diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-LC\omega^2}{1 + j\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2}$$

$$\text{soit} \quad \underline{H} = \frac{-4 \cdot 10^{-8}\omega^2}{1 - 4 \cdot 10^{-8}\omega^2 + j \cdot 4 \cdot 10^{-6}\omega}$$

– À basse fréquence, la fonction de transfert équivalente est le rapport des termes de plus bas degré :

$$\underline{H}_{BF} = -4{\cdot}10^{-8}\omega^2 \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} H_{BF} = 4 \cdot 10^{-8}\omega^2 \quad \text{et} \quad G_{BF} = 20\log(4 \cdot 10^{-8}) + 40\log\omega \\ \varphi_{BF} = \pm\pi \end{array}\right.$$

– À haute fréquence, la fonction de transfert équivalente est le rapport des termes de plus haut degré :

$$\underline{H}_{HF} = 1 \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} H_{HF} = 1 \quad \text{et} \quad G_{HF} = 0 \\ \varphi_{BF} = 0 \end{array}\right.$$

– Les asymptotes se croisent quand $H_{BF} = H_{HF}$ soit $4{\cdot}10^{-8}\omega^2 = 1$ soit $\omega^* = 5000\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Pour cette valeur :

$$\underline{H}^* = \frac{1}{0,02j} \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} H^* = \frac{1}{0,02} = 50 \quad \text{et} \quad G_{HF} = 34\ \text{dB} \\ \varphi_{BF} = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

C'est donc un filtre passe-haut (résonnant) dont la pulsation de coupure est de l'ordre de $5000\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Seule la troisième composante harmonique, de pulsation ($8000\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$) supérieure à la pulsation de coupure, passe : le signal de sortie est donc

$$u_s \simeq 3\sin(8000t)$$

Le haut-parleur a donc modifié le filtre.

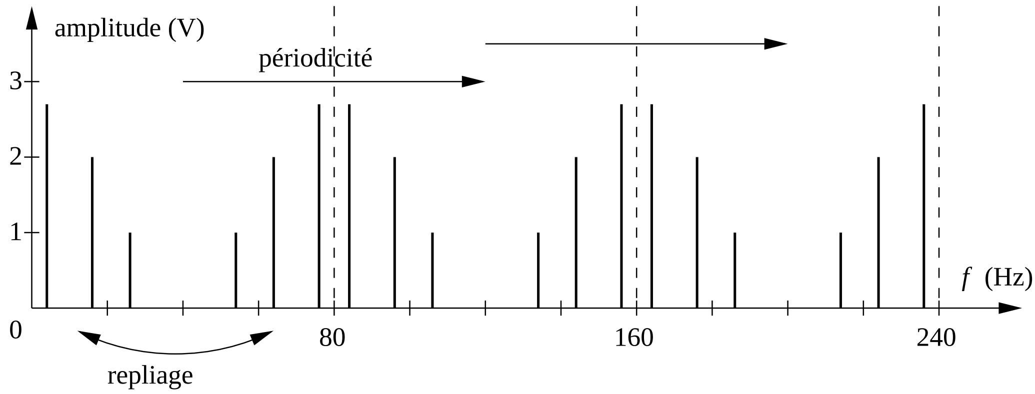
Exercice 4 **Échantillonnage d'un signal, effet d'un parasitage**

1. La fréquence maximale dans le spectre du signal est $f_{\max} = 25$ Hz. On a donc

$$f_e = 80 \text{ Hz} > 2f_{\max} = 50 \text{ Hz}$$

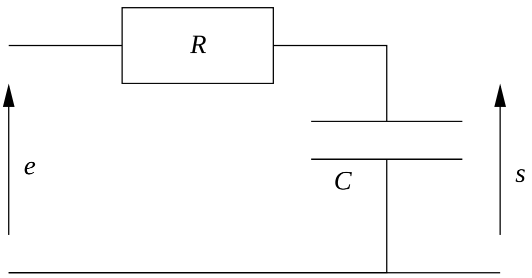
et le critère de Nyquist-Shannon est donc vérifié.

2. On effectue sur le spectre les opérations de repliement et de périodicité :



3. La fréquence du signal parasite, $f_p = 50$ Hz, est supérieure à $\frac{f_e}{2} = 40$ Hz donc le critère de Nyquist-Shannon n'est plus vérifié. Le repliement du spectre donne un signal parasite à $f_e - f_p = 30$ Hz qui est très proche de la fréquence effective 25 Hz du signal.

4. C'est pourquoi on doit intercaler un filtre passe-bas pour éliminer la fréquence parasite $f_p =$ 50 Hz avant l'échantillonnage. Ce filtre doit conserver la fréquence maximale $f_{\max} = 25$ Hz du signal. Sa frécquence de coupure doit donc être d'environ 35 Hz. Le plus simple des filtres est du type R-C :



La fonction de transfert est

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$ donc la fréquence de coupure vaut

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

En prenant $C = 1,0\ \mu$F, pour obtenir $f_c = 35$ Hz, on choisit

$$R = \frac{1}{2\pi C f_c} = 4,5 \text{ k}\Omega$$

Exercice 5 $\boxed{\textbf{Échantillonneur-bloqueur}}$

1. L'interrupteur met en communication le signal d'entrée $e(t)$ et le système de mise en mémoire à intervalles de temps réguliers grâce à l'horloge : c'est donc bien un échantillonneur.
2. D'après le critère de Nyquist-Shannon, la fréquence maximale doit vérifier

$$f_{\max} < \frac{f_e}{2} = 0,5\ \text{Hz}$$

Or la période du signal est $T \simeq 60$ s donc la fréqence fondamentale est $f \simeq \frac{1}{60}$ Hz et les harmoniques ont pour fréquences f, $2f$, $\ldots$, pf. Il faut donc

$$pf < \frac{f_e}{2} \quad \text{soit} \quad p < \frac{f_e}{2f} = 30$$

3. Par définition du suiveur, $s(t)$ est égale à la tension u_C aux bornes du condensateur. De plus, dans l'intervalle $[nT_e, nT_e+\delta t]$, l'interrupteur est fermé. Pour que l'égalité $s(nT_e+\delta t) \simeq e(t)$, il faut donc que

$$\text{(a) } \forall t \in [nT_e, nT_e+\delta t],\ u_C(t) \simeq \varepsilon(t) = e(t) \quad \text{et} \quad \text{(b) } e(nT_e+\delta t) \simeq e(nT_e)$$

Donnons les conditions pour que ces deux égalités soient vérifiées.

   (a) Le temps caractéristique de charge du condensateur à travers la résistance est $\tau = RC$. Il faut donc que $\delta t \gg RC$.

   (b) Il faut que e puisse être considérée comme sensiblement constante pendant δt, donc que sa variation pendant δt soit négligeable devant sa variation entre deux prélèvements, donc que $\delta t \ll T_e$.

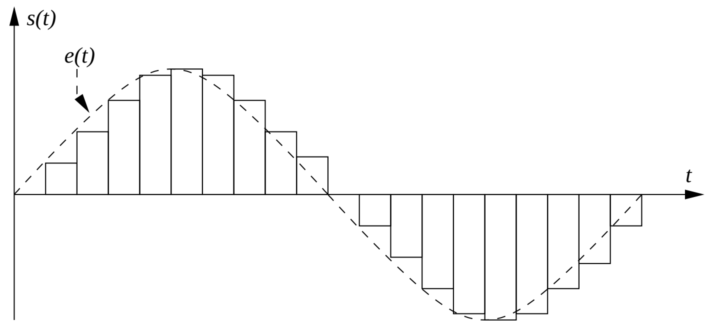
   On prend donc $RC \ll \delta t \ll T_e$.

4. Dès que l'interrupteur commandé est ouvert, l'intensité circulant dans la résistance est nulle ; or celle entrant dans le suiveur est nulle, donc d'après la loi des nœuds, $i_C = 0$ soit $\frac{du_C}{dt} = 0$ donc u_C est constante. Comme $s(t) = u_C(t)$, elle est elle-aussi constante dans l'intervalle $[nT_e+\delta t, (n+1)T_e]$ et

$$\forall t \in [nT_e+\delta t, (n+1)T_e],\ s(t) = s(nT_e+\delta t) \simeq e(nT_e)$$

Cette dernière égalité prouve le caractère « bloqueur » du dispositif.

5. En utilisant les résultats précédents, $s(t)$ est une fonction en escalier qui coïncide avec $e(t)$ à chaque date multiple de T_e.

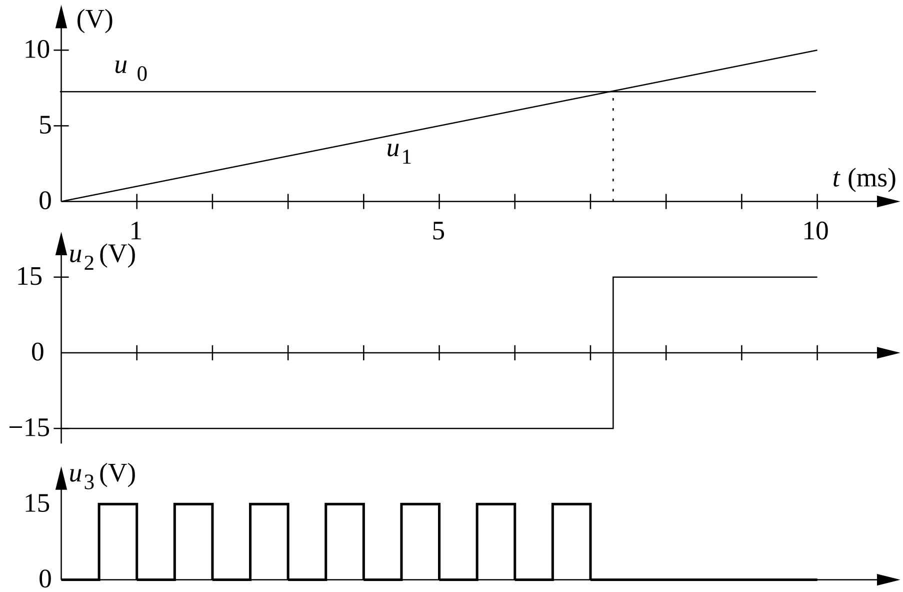


Exercice 6 **Convertisseur analogique/numérique à compteur d'impulsions**

1. Jusqu'à la date $t = 0$, K est fermé donc $u_C(t = 0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u_1(tt = 0^+) = u_C(t = 0^+) = 0$. Pour $t \geq 0$, K est ouvert et de plus $i = 0$ dans la branche entrant dans le comparateur. l'intensité I_0 délivrée par GC I_0 traverse donc le condensateur. On en déduit que

$$I_0 = C\frac{du_1}{dt} \quad \text{donc} \quad u_1 = \frac{I_0}{C}t$$

2. Avec les valeurs numériques données, $u_1(t) = 1000t$, et atteint donc $u_0 = 7,31$ V à la date $t = 7,31$ ms.



3. Le fonctionnement du comparateur décrit par l'énoncé entraîne que

$$\forall t \in [0\ ;\ 7,31 \text{ ms}],\ u_1(t) < u_0 \quad \text{donc} \quad u_2(t) = -15 \text{ V}$$

$$\forall t > 7,31 \text{ ms}],\ u_1(t) > u_0 \quad \text{donc} \quad u_2(t) = +15 \text{ V}$$

Comme u_2 est relié à la gachette, Kc est donc fermé pour $t \leq 7,31$ ms et ouvert pour $t > 7,31$ ms. Si $rC \ll T$, le condensateur se charge très rapidement à la tension u_3. Son utilité est que lorsque Kc s'ouvre, u_3 reste bloqué à la valeur qu'elle avait avant l'ouverture, soit $u_3 = 0$ pour $t > 7,31$ ms. On en déduit l'évolution dans le temps de u_3, qui effectuer sept impulsions avant de se fixer à la tension nulle.

4. Le compteur compte donc 7 impulsions : la tension analogique $u_0 = 7,31$ V e donc été convertie entre une valeur numérique approchée de 7 V. Pour obtenir une précision du décivolt, il faut compter 73 impulsions, et il suffit donc de prendre $T = 0,1$ ms.

Exercice 7 $\boxed{\textbf{Transmission d'un signal binaire}}$

1. Il faut qu'au moins une sinusoïde puisse se développer pendant la durée du « zéro », donc

$$T/4 > \frac{1}{f_0} \quad \text{soit} \quad T > \frac{4}{f_0} = 25\ \mu\text{s}$$

2. Chaque bit dure $\frac{1}{T}$, le débit d'information est de

$$\frac{1}{T} = 16,7\ \text{kbit} \cdot \text{s}^{-1} = 2,08\ \text{ko} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. Le signal reste lisible (on distingue les impulsions brèves et longues) malgré la dégradation ; c'est le grand avantage de la transmission numérique sur la transmission analogique.

Exercice 8 $\boxed{\textbf{Stockage d'un signal binaire}}$

On compare à chaque fois l'état du capteur à la date nT à celui à la date $(n-1)T$:

date t	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$
état	pit	pit				pit			
changement		non	oui	non	non	oui	oui	non	non
bit		0	1	0	0	1	1	0	0

Le signal binaire est donc 01001100.

Exercice 9 $\boxed{\textbf{Transposition fréquentielle}}$

1. Transposition fréquentielle analogique.
   (a) La n-ième harmonique de fréquence $f_n = nf_1$ a pour période $T_n = \frac{1}{nf_1}$. L'augmentation de vitesse angulaire de rotation d'un facteur $\frac{45}{100/3}$ correspond à une diminution des durées d'un facteur inverse. La période modifiée est donc

$$T'_n = \frac{100/3}{45} \cdot T_n \quad \text{donc} \quad f'_n = \frac{45}{100/3} \cdot f_n$$

   Comme ce facteur est indépendant de n, il y a donc une transposition fréquentielle de facteur

$$\alpha = \frac{f'_n}{f_n} = \frac{45}{100/3} = 1,35$$

   Ce procédé n'est pas applicable en temps réel, car on ne peut pas accélérer le temps.
   (b) Il y a transposition de p demi-tons :

$$\left[\sqrt[12]{2}\right]^p = 1,35 \Leftrightarrow 2^{\frac{p}{12}} = 1,35 \Leftrightarrow p = 12\frac{\ln 1,35}{\ln 2} \simeq 5 \text{ demi} - \text{tons}$$

2. Transposition fréquentielle numérique.
   (a) Pour tout n entier, $f'_n = \alpha f_n = n\alpha f_1$.
   (b) On ne change sélectivement que les harmoniques du chanteur.
   (c) On fait subir une réduction aux fréquences non perçues par le patient et pour les déplacer dans les gammes perçues.

Exercice 10 $\boxed{\textbf{Convertisseur numérique/analogique 3 bits}}$

Si un quelconque des interrupteurs est fermé, la tension E est appliquée aux bornes de la résistance de la broche et d'après la loi d'Ohm :

$$i_0 = \frac{E}{4r} \quad \text{ou} \quad i_1 = \frac{E}{2r} \quad \text{ou} \quad i_2 = \frac{E}{r}$$

Lorsqu'on applique le signal $\overline{qdu}$ aux gachettes, d'après la loi des nœuds :

$$i = i_0 + i_1 + i_2 = u \cdot \frac{E}{4r} + d \cdot \frac{E}{2r} + q \cdot \frac{E}{r} = \frac{E}{4r} \cdot [u + 2d + 4q]$$

En utilisant la loi du CCT, on en déduit que

$$u_s = \frac{kE}{4r} \cdot [4q + 2d + u]$$

Le montage délivre donc une tension u_s proportionnelle au nombre en base deux $\overline{qdu}$: on a donc bien réalisé un CNA.