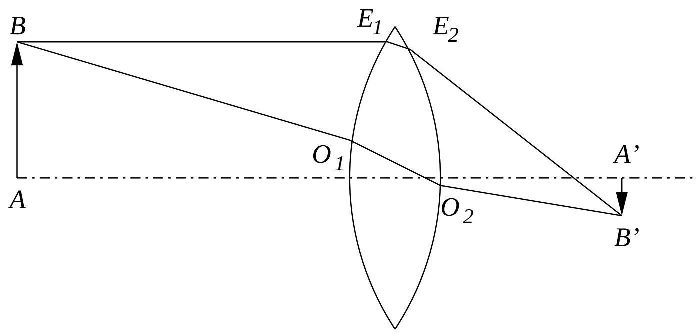
Chapitre 9

Optique physique

Exercice 1 $\boxed{\textbf{Traversée d'une lentille mince}}$
La lentille mince est plus épaisse qu'au centre :



En prenant 1 pour indice de l'air et n pour celui du verre, on a donc

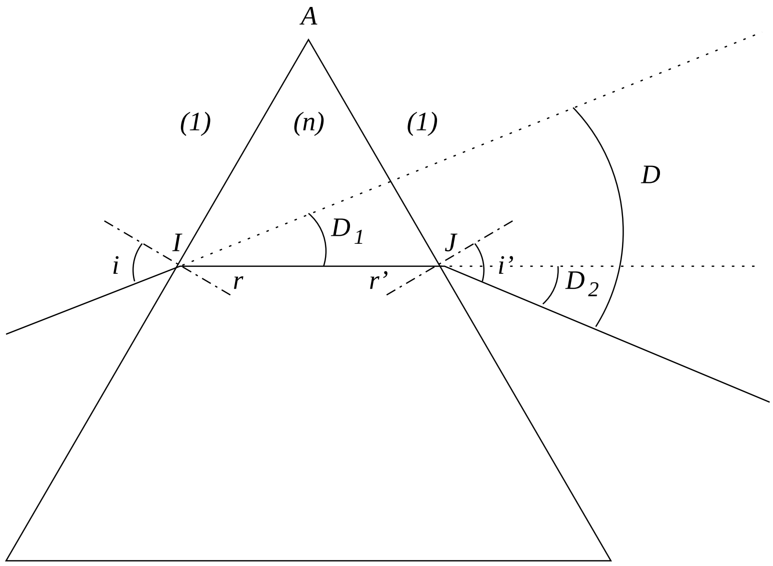
$$[BEF'B'] = [BE_1] + [E_1E_2] + [E_2B'] = BE_1 + nE_1E_2 + E_2B'$$

$$\text{et} \quad [BOB'] = [BO_1] + [O_1O_2] + [O_2B'] = BO_1 + nO_1O_2 + O_2B'$$

L'épaisseur de verre traversée par le second rayon (O_1O_2) est donc nettement plus grande que celle traversée par le premier (E_1E_2), et les deux chemins optiques peuvent donc bien être égaux conformément au théorème de Malus.

Exercice 2 $\boxed{\textbf{Traversée d'un prisme}}$

Les notations sont celles du schéma suivant :



(A, I, J) est un triangle équilatéral donc

$$IJ = d = 5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad r = r' = 30° \quad \text{donc} \quad i' = i = 45°$$

L'angle de déviation est

$$D = D_1 + D_2 = i - r + i' - r' = 30°$$

L'indice du verre est donné par la loi de Descartes en I ou en J :

$$\sin i = n \sin r \quad \text{donc} \quad n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin 45}{\sin 30} = \sqrt{2} = 1,414$$

d'où $[IJ] = nIJ = nd = d\sqrt{2} = 7,07$ cm

Exercice 3 $\boxed{\textbf{Laser à dioxyde de carbone}}$

$\lambda = 10\ 600$ nm donc ce laser émet dans le domaine de l'infra-rouge. Par application de la formule du cours :

$$\Delta t \cdot \Delta f \simeq 1 \quad \text{donc} \quad \Delta f \simeq 10 \text{ kHz}$$

La fréquence moyenne dans le vide vaut $f_0 = \frac{c_0}{\lambda_0}$. La largeur spectrale reltaive vaut donc

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\lambda_0 \Delta f}{c_0} = 3,5 \cdot 10^{-10}$$

La longueur de cohérence est la distance parcourue par la lumière pendant la durée moyenne Δt du train d'onde , soit

$$L_c = c_0 \Delta t = 30 \text{ km}$$

Exercice 4 $\boxed{\textbf{Formule de Fresnel si } I_1 = I_2}$

1. D'après le cours, si on note $\underline{a}_0(t)$ la vibration à la source, alors

$$\begin{cases} \underline{a}_1(M,t) = \underline{a}_0(t)e^{j\Phi_1(M)} \\ \underline{a}_2(M,t) = \underline{a}_0(t)e^{j\Phi_2(M)} \end{cases} \qquad \text{donc} \quad \frac{\underline{a}_2}{\underline{a}_1} = e^{j(\Phi_2-\Phi_1)} = e^{j\Phi_{2/1}}$$

soit $\underline{a}_2 = \underline{a}_1 e^{j\Phi_{2/1}}$.

2. Les deux ondes sont cohérentes donc

$$\underline{a}(M,t) = \underline{a}_1(M,t) + \underline{a}_2(M,t) = \underline{a}_1(M,t)\left(1 + e^{j\Phi_{2/1}}\right)$$

3. Par définition de l'intensité lumineuse :

$$I(M) = K\underline{a}(M,t)\cdot\underline{a}^*(M,t) = K\underline{a}_1(M,t)\left(1 + e^{-j\Phi_{2/1}}\right)\cdot\underline{a}_1^*(M,t)\left(1 + e^{j\Phi_{2/1}}\right)$$

$$\text{soit} \quad I(M) = K|\underline{a}_1(M,t)|^2\left[1 + e^{-j\Phi_{2/1}} + e^{-j\Phi_{2/1}} + 1\right]$$

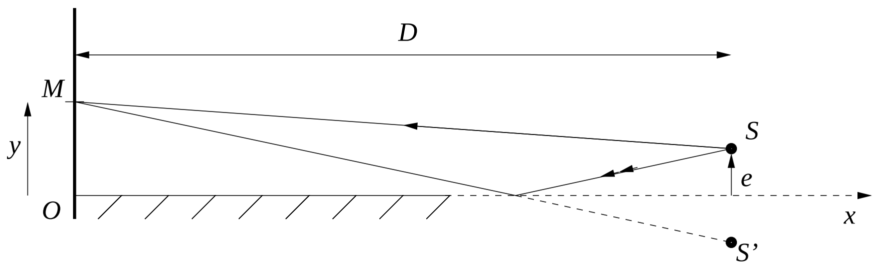
On reconnaît $I_1 = K|\underline{a}_1(M,t)|^2 = K|\underline{a}_2(M,t)|^2 = I_2$ donc

$$I(M) = I_1\left[2 + 2\cos\Phi_{2/1}\right] = 2I_1(1 + \cos\Phi_{2/1})$$

qui est bien la formule de Fresnel avec $I_1 = I_2$.

Exercice 5 $\boxed{\textbf{Interférences à un miroir}}$

1. En M se rejoignent le rayon direct et rayon réfléchi sur le miroir. Celui-ci semble provenir de S' symétrique de S.



2. Le chemin optique direct est $[SM]_1 = SM$ Le chemin avec réflexion est et $[SM]_2 = S'M + \frac{\lambda_0}{2}$, le terme $\frac{\lambda_0}{2}$ étant associé à la réflexion sur le miroir. Pour mesurer les longueurs des trajets, donnons les coordonnées cartésiennes des trois points et calculons les normes des vecteurs :

$$S \left| \begin{array}{l} D \\ e \\ 0 \end{array} \right. , \quad S' \left| \begin{array}{l} D \\ -e \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad M \left| \begin{array}{l} 0 \\ y \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\text{donc} \quad [SM]_1 = \sqrt{D^2 + (e-y)^2} \quad \text{et} \quad [SM]_2 = \sqrt{D^2 + (e+y)^2} + \frac{\lambda_0}{2}$$

3. Les développements limités s'écrivent :

$$SM = \sqrt{D^2 + (e-y)^2} = D\sqrt{1 + \frac{(e-y)^2}{D^2}} \simeq 1 + \frac{e^2 - 2ey + y^2}{2D^2}$$

$$\text{et} \quad S'M = \sqrt{D^2 + (e+y)^2} = D\sqrt{1 + \frac{(e+y)^2}{D^2}} \simeq 1 + \frac{e^2 + 2ey + y^2}{2D^2}$$

On en déduit la différence de marche :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 = \left(1 + \frac{e^2 + 2ey + y^2}{2D^2}\right) + \frac{\lambda_0}{2} - \left(1 + \frac{e^2 - 2ey + y^2}{2D^2}\right) = \frac{2ey}{D} + \frac{\lambda_0}{2}$$

4. L'intensité lumineuse est, d'après la formule de Fresnel :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right) = 2I_0 \left(1 + \cos\left[\frac{4\pi ey}{\lambda_0 D} + \pi\right]\right)$$

Les franges sont définies par $I =$ cste donc par $y =$ cste : ce sont donc des franges rectilignes parallèles horizontales. Lesw franges brillantes sont définies par cos = 1 donc

$$\frac{4\pi ey}{D} + \pi = p \cdot 2\pi \quad \text{soit} \quad y_p = -\frac{\lambda_0 D}{4e} + p\frac{\lambda_0 D}{2e}$$

où p est un entier (ordre d'interférence). L'interfrange est donc

$$i = |y_{p+1} - y_p| = \frac{\lambda_0 D}{2e} = 3,5 \text{ mm}$$

Exercice 6 **Irisations sur une flaque d'huile**

1. Dans l'ordre : $HK = e$, $IH = e\tan r$, $HJ = e\tan r$, $IK = \frac{e}{\cos r}$, $KJ = \frac{e}{\cos r}$, $IJ = 2e\tan r$ et $LJ = 2e\tan r \sin i$.
2. On en déduit la différence de marche : d'après le théorème de Malus, le segment $[IL]$, perpendiculaire aux rayons, est une surface équiphase, donc

$$\delta = [IK] + [KJ] - [LJ] = nIK + nKJ - LJ$$

$$\text{soit} \quad \delta = \frac{2ne}{\cos r} - 2e\tan r \sin i = \frac{2ne}{\cos r} - \frac{2ne\sin^2 r}{\cos r} = 2ne\cos r$$

3. D'après la formule de Fresnel, l'interférence entre les deux rayons est destructive si l'ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$ est un demi-entier, donc si $\delta = \frac{\lambda_0}{2} + k\lambda_0$, k entier.
4. Par application de la loi de Descartes :

$$\sin i = n\sin r \quad \text{soit} \quad r = \arcsin\frac{\sin i}{n} = 36°$$

Pour $k = 0$, la longueur d'onde éteinte est $\lambda_0 = 4ne\cos r = 476$ nm (bleu) ; pour $k = 1$, on obtient $\lambda_0 = \frac{4}{3}ne\cos r = 158$ nm qui est dans le domaine de l'ultraviolet. Le bleu est donc la seule couleur éteinte, on voit donc la couleur complémentaire : le jaune.

5. e varie et i varie d'un point à l'autre de la flaque donc la couleur éteinte, et la teinte perçue varie, d'où l'irisation.

Exercice 7 **Distinguer un CD et un DVD avec un laser**

1. D'après la formule du cours :

$$\sin\theta_k = -k\frac{\lambda_0}{d}$$

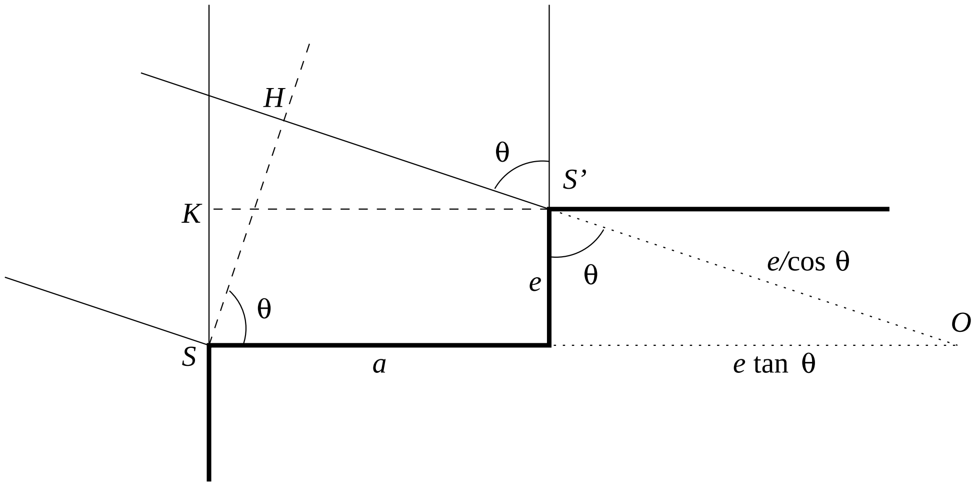
   Un sinus est compris entre -1 et $+1$ donc

$$-1 < -k\frac{\lambda_0}{d} < +1 \quad \text{donc} \quad -\frac{d}{\lambda_0} \leq k \leq \frac{d}{\lambda_0}$$

2. Entre ces deux bornes, on a $E\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right) + 1$ entiers ($E(x)$ désigne la partie entière de x.
   - Pour un CD :$E\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right) + 1 = 5$ donc $d \simeq 2\lambda_0$ et $N \simeq \frac{a}{d} = 28000$.
   - Pour un DVD :$E\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right) + 1 = 3$ donc $d \simeq \lambda_0$ et $N \simeq \frac{a}{d} = 56000$.

Exercice 8 **Réseau de Michelson**

1. Le miroir est d'une taille comparable à la longueur d'onde donc il y a diffraction.
2. Pour appliquer le théorème de Malus, traçons les surfaces perpendiculaires aux rayons.



La différence de marche est donc

$$\delta = [KS] - [S'H] = KS - S'H = e - S'H$$

Dans le triangle rectangle (OSH), d'après la figure :

$$OS = a + e\tan\theta \quad \text{et} \quad OS' = \frac{e}{\cos\theta}$$

$$\text{donc} \quad S'H = OH - OS' = OS\sin\theta - OS' = (a + e\tan\theta)\sin\theta - \frac{e}{\cos\theta}$$

$$\text{soit} \quad S'H = a\sin\theta + e\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{e}{\cos\theta} = a\sin\theta - e\cos\theta$$

La différence de marche est donc

$$\delta = e - a\sin\theta + e\cos\theta$$

3. D'après la formule du cours, transposée du réseau par transmission au réseau par réflexion, les directions privilégiées sont définies par $\delta = k\lambda_0$, k entier, soit

$$e - a\sin\theta_k + e\cos\theta_k = k\lambda_0$$

4. Pour $k = 0$, $e - a\sin\theta_0 + e\cos\theta_0 = 0$ et donc

$$e = \frac{a\sin\theta_0}{1 - \cos\theta_0} = 3,5 \ \mu\text{m}$$

Exercice 9 $\boxed{\textbf{Séparation angulaire d'un système de deux étoiles}}$

1. En amont des trous d'Young, les rayons sont parallèles et les surfaces d'onde sont donc des plans orthogonaux. Celui qui passe par T coupe l'autre rayon en H avec (THU) triangle rectangle et $\frac{\alpha}{2}$ est l'angle entre $[TU]$ et $[TH]$. On en déduit que

$$\delta_a = [S_1U] - [S_1T] = S_1H + HU - S_2T = HU = a\sin\frac{\alpha}{2}$$

En aval, le calcul est le même que dans le cours : en utilisant les coordonnées cartésiennes de T, U et M, et en effectuant un développement limité :

$$\delta(y) = -\frac{ay}{D}$$

Par application de la formule de Fresnel :

$$I_1(y) = 2I_0\left[1 + \cos\frac{2\pi(\delta(y)+\delta_a)}{\lambda_0}\right]$$

2. Il est inutile de refaire le calcul complet pour S_2 : il suffit de remplacer $\frac{\alpha}{2}$ par $-\frac{\alpha}{2}$, donc δ_a par $-\delta_a$:

$$I_2(y) = 2I_0\left[1 + \cos\frac{2\pi(\delta(y)-\delta_a)}{\lambda_0}\right]$$

3. Les deux étoiles forment deux sources incohérentes : on somme donc les intensités :

$$I(M) = I_1(y) + I_2(y) = 2I_0\left[2 + \cos\frac{2\pi(\delta(y)+\delta_a)}{\lambda_0} + \cos\frac{2\pi(\delta(y)-\delta_a)}{\lambda_0}\right]$$

En utilisant la formule de trigonométrie $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, on obtient

$$I(M) = 4I_0\left[1 + \cos\frac{2\pi\delta_a}{\lambda_0}\cos\frac{2\pi\delta(y)}{\lambda_0}\right]$$

Le terme $\cos\frac{2\pi\delta(y)}{\lambda_0}$ varie entre -1 et $+1$; $I(M)$ varie donc entre

$$\left\{\ I_{\min} = 4I_0\left[1 - \left|\cos\tfrac{2\pi\delta_a}{\lambda_0}\right|\right]\ I_{\max} = 4I_0\left[1 + \left|\cos\tfrac{2\pi\delta_a}{\lambda_0}\right|\right]\right.$$

Le contraste est donc

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left|\cos\frac{2\pi\delta_a}{\lambda_0}\right|$$

Il y a brouillage quand le contraste est nul, soit

$$\cos\frac{2\pi\delta_a}{\lambda_0} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi\delta_a}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

où k est un entier. Pour $k = 0$:

$$\delta_a = \frac{\lambda_0}{4} \quad \text{soit} \quad a\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$\text{soit} \quad \alpha = 2\mathrm{arc}\sin\frac{\lambda_0}{4a} = 1,43\ \mu\text{rad}$$

Exercice 10 $\boxed{\textbf{Brouillage des franges par élargissement spatial}}$

1. Les coordonnées des quatre points sont

$$dS\left|\begin{array}{l}-L\\ y_S\\ 0\end{array}\right. ,\quad T_1\left|\begin{array}{l}0\\ -\frac{a}{2}\\ 0\end{array}\right. ,\quad T_2\left|\begin{array}{l}0\\ \frac{a}{2}\\ 0\end{array}\right. \quad \text{et} \quad M\left|\begin{array}{l}D\\ y\\ 0\end{array}\right.$$

Calculons l'une des quatre distances :

$$dST_1 = \|\overrightarrow{dSM}\| = \sqrt{L^2 + \left(y_S + \frac{a}{2}\right)^2} = L\sqrt{1 + \frac{y_S^2 + ay_S + \frac{a^2}{4}}{L^2}}$$

Effectuons le développement limité :

$$dST_1 \simeq L + \frac{y_S^2 + ay_S + \frac{a^2}{4}}{2L}$$

On calcule de même :

$$dST_2 \simeq L + \frac{y_S^2 - ay_S + \frac{a^2}{4}}{2L}$$

$$T_1M \simeq D + \frac{y^2 + ay + \frac{a^2}{4}}{2D}$$

$$T_2M \simeq D + \frac{y^2 - ay + \frac{a^2}{4}}{2D}$$

La différence de marche est

$$\delta = [dST_2M] - [dST_1M] = dST_2 + T_2M - dST_1 - T_1M = -\frac{ay_S}{L} - \frac{ay}{D}$$

2. Les deux ondes, issues de la même source dS sont cohérentes, on peut donc appliquer la formule de Fresnel :

$$dI = \frac{2I_0}{e}\left[1 + \cos\frac{2\pi\delta(y_s)}{\lambda_0}\right] dy_S$$

3. Les sources dS étant distinctes, elles sont deux à deux incohérentes et on somme les intensités lumineuses. L'intégrale a pour expression détaillée

$$I(M) = \int_{y_S=-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{2I_0}{e}\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left[\frac{y_S}{L} + \frac{y}{D}\right]\right) dy_S$$

$$\text{soit} \quad I(M) = \frac{2I_0}{e}\left[y_S + \frac{\sin\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left[\frac{y_S}{L} + \frac{y}{D}\right]}{\frac{2\pi a}{\lambda_0 L}}\right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$= \frac{2I_0}{e}\left[e + \frac{\sin\left(\frac{\pi ea}{\lambda_0 L} + \frac{2\pi ya}{\lambda_0 D}\right) - \sin\left(-\frac{\pi ea}{\lambda_0 L} + \frac{2\pi ya}{\lambda_0 D}\right)}{\frac{2\pi a}{\lambda_0 L}}\right]$$

En utilisant la relation de trigonométrie $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$, il vient :

$$I(M) = \frac{2I_0}{e}\left[e + e\frac{2\sin\frac{\pi ea}{\lambda_0 L}\cos\frac{2\pi ya}{\lambda_0 D}}{\frac{2\pi ea}{\lambda_0 L}}\right]$$

$$\text{soit} \quad I(M) = 2I_0\left[1 + \sin c\frac{\pi ea}{\lambda_0 L}\cos\frac{2\pi ya}{\lambda_0 D}\right]$$

C'est bien l'expression donnée par l'énoncé avec $\gamma = \sin c\frac{\pi ea}{\lambda_0 L}$.

4. Le terme $\cos\frac{2\pi y a}{\lambda_0 D}$ varie entre -1 et $+1$, donc $I(M)$ varie entre

$$I_{\min} = 2I_0\left[1 - \left|\sin c\frac{\pi e a}{\lambda_0 L}\right|\right] \quad \text{et} \quad I_{\max} = 2I_0\left[1 + \left|\sin c\frac{\pi e a}{\lambda_0 L}\right|\right]$$

   Le contraste vaut donc

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left|\sin c\frac{\pi e a}{\lambda_0 L}\right|$$

5. Le brouillage apparaît lorsque le contraste devient très faible, donc lorsque l'argument du sinus cardinal atteint $-\pi$ ou π :

$$\frac{\pi e a}{\lambda_0 L} = \pi \quad \text{soit} \quad \frac{ea}{\lambda_0 L} = 1$$

$$\text{ou} \quad \frac{\pi(-e)a}{\lambda_0 L} = -\pi \quad \text{soit} \quad \frac{(-e)a}{\lambda_0 L} = -1$$

   Conformément à la loi du cours, calculons la variation de l'ordre d'interférence sur la moitié de la source, entre dS au centre ($y_S = 0$) et dS à la périphérie de la source ($y_S = \frac{e}{2}$) :

$$\Delta p = p(y_S = 0) - p(y_S = \frac{e}{2}) = \frac{\delta(0) - \delta\left(\frac{e}{2}\right)}{\lambda_0} = \frac{ea}{2\lambda_0 L}$$

   Or nous avons montré ci-dessus que le brouillage apparaît lorsque $\frac{ea}{\lambda_0 L} > 1$ donc lorsque $\Delta p > \frac{1}{2}$.

Exercice 11 $\boxed{\textbf{Raie verte du mercure}}$

1. Par application de la formule du cours : $i = \frac{\lambda_0 D}{a} = 5,46$ mm.
2. La variation de l'ordre d'interférences mesurée sur la moitié de la largeur spectrale est

$$\Delta p = \frac{\delta}{\lambda_0} - \frac{\delta}{\lambda_0 + \frac{\delta\lambda}{2}} = \frac{\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2 + \lambda_0\Delta\lambda} \simeq \frac{\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

D'après le cours, il y a brouillage si

$$\Delta p > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \delta > \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = 5,96 \text{ mm}$$

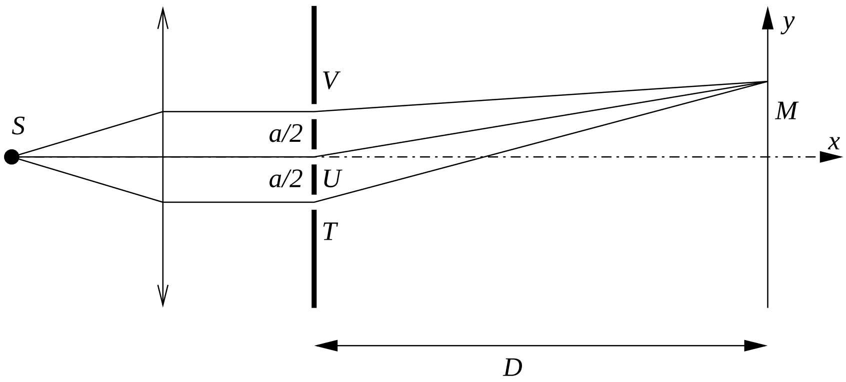
3. La différence de marche vaut $\delta = \frac{ya}{D}$ donc

$$y = \frac{\delta D}{a} > 59,6 \text{ m}$$

qui est très supérieur à la taille d'un écran, et qui correspondrait à un point très en dehors de la zone d'interférence. Le dispositif des trous d'Young n'est donc pas adapté.

Exercice 12 **Trois trous d'Young**

Les notations sont celles du schéma suivant :



Par application du résultat du cours, les différences de marche entre le rayon passant par U et ceux passant respectivement par T et V sont :

$$\delta(U/T) = [SUM] - [STM] = -\frac{y\frac{a}{2}}{D} = \frac{ay}{2D} =$$

$$\delta(U/V) = [SUM] - [SVM] = \frac{y\frac{a}{2}}{D} = \frac{ay}{2D}$$

Les trois ondes proviennent de la même source et sont cohérentes, on somme donc les ondes complexes. Notons $\underline{a}_0 = \underline{a}_U(M,t)$ la fonction d'onde complexe reçue en M après passage par le trou central U. Il vient :

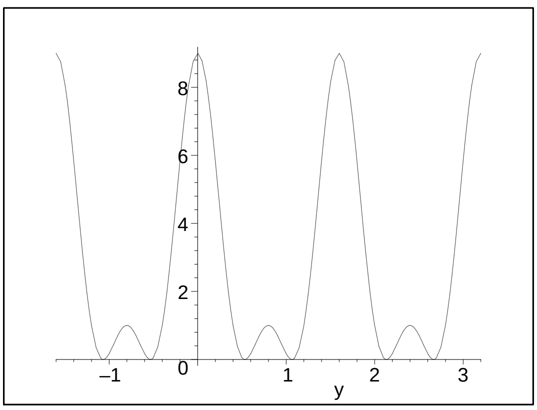
$$\underline{a}(M,t) = \underline{a}_T(M,t) + \underline{a}_U(M,t) + \underline{a}_V(M,t) = \underline{a}_0 e^{-j\frac{2\pi\delta(U/T)}{\lambda_0}} + \underline{a}_0 + \underline{a}_0 e^{-j\frac{2\pi\delta(U/V)}{\lambda_0}}$$

$$\text{soit} \quad \underline{a}(M,t) = \underline{a}_0\left(e^{-j\frac{2\pi ay}{2\lambda_0 D}} + 1 + e^{j\frac{2\pi ay}{2\lambda_0 D}}\right) = \underline{a}_0\left(1 + 2\cos\frac{\pi ay}{\lambda_0 D}\right)$$

L'intensité lumineuse en M est donc

$$I(y) = K\underline{a}(M,t)\underline{a}^*(M,t) = K\underline{a}_0\underline{a}_0^*\left(1 + 2\cos\frac{\pi ay}{\lambda_0 D}\right)^2$$

soit $I(y) = I_0\left[1 + 2\cos\frac{\pi ay}{\lambda_0 D}\right]^2$. C'est une fonction périodique de période $\frac{2\lambda_0 D}{a} = 1,6$ cm dont voici l'allure :



Elle présente des pics de tailles distinctes donc des alternances de taches très brillantes et de taches secondaires moins brillantes.

Exercice 13 $\boxed{\textbf{Franges d'égale épaisseur}}$

1. La première relation de conjugaison s'écrit $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}$ donc $\frac{1}{D'} = \frac{1}{-D} + \frac{1}{f'}$ d'où $D' = \frac{f'D}{D-f'}$; on en déduit le grandissement

$$\frac{-x'}{x} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{D'}{D} = \frac{-f'}{D-f'}$$

2. La formule du cours donne $\varepsilon = \alpha x$.
3. Par application de la définition du grandissement : $x' = \frac{-f'x}{D-f'}$ donc $\varepsilon = -\alpha\frac{D-f'}{f'}x'$.
4. La différence de marche est donc : $\delta = 2\varepsilon = -2\alpha\frac{D-f'}{f'}x'$
5. Par application de la formule de Fresnel :

$$I(x') = 2\mathcal{E}_0\left(1 - \cos\frac{4\pi\alpha(D-f')}{\lambda f'}\right)$$

Les franges brillantes sont définies par

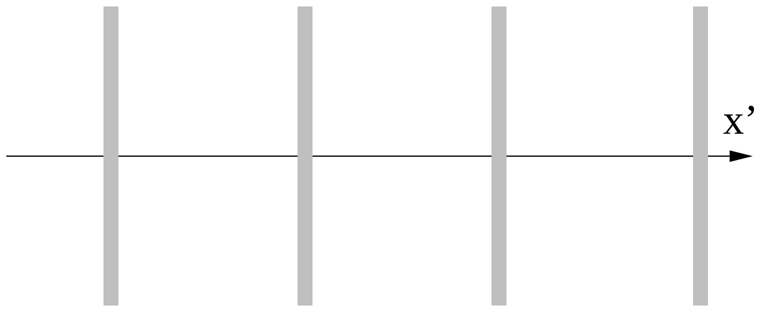
$$\frac{4\pi\alpha(D-f')}{\lambda f'} = p \cdot 2\pi \quad \text{donc} \quad x'_p = p\frac{\lambda f'}{2\alpha(D-f')}$$

et l'interfrange est donc $i = x'_{p+1} - x'_p = \frac{\lambda f'}{2\alpha(D-f')}$.

6. On a

$$\alpha = \frac{0,5}{60} \cdot \frac{\pi}{180} = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

et $i = 2,6$ cm. On voit donc des franges rectilignes parallèles distantes de 2,6 cm.



Exercice 14 $\boxed{\textbf{Franges d'égale inclinaison}}$

1. Par application de la formule de Fresnel,

$$I = 2I_0\left(1 + \cos\frac{4\pi e\cos i}{\lambda}\right)$$

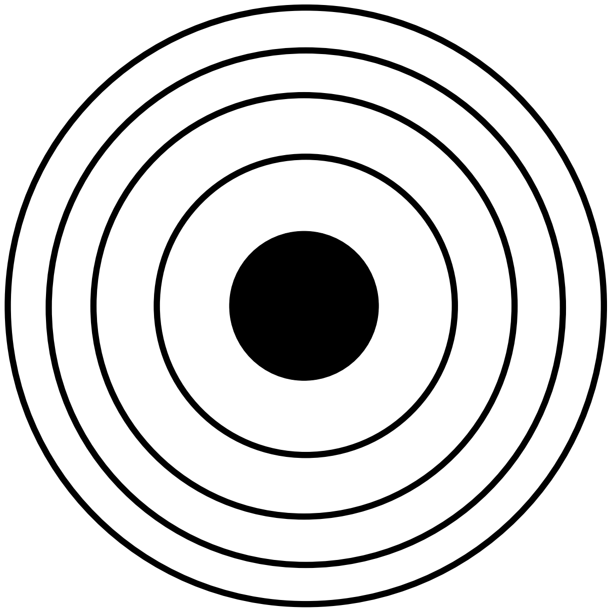
et les franges brillantes sont définies par $\cos i = p\frac{\lambda}{2e}$, p entier. Au centre, $i = 0$ et on a une tache brillante par hypothèse donc $p_0\frac{\lambda}{2e}$ donc $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$ (entier) d'où $\cos i = \frac{p}{p_0}$. On fait le développement limité d'où

$$1 - \frac{i^2}{2} = \frac{p}{p_0} \quad \text{soit} \quad \frac{i^2}{2} = \frac{p_0 - p}{p_0}$$

donc nécessairement $p \leq p_0$. En posant $q = p_0 - p$, on a

$$r_q = \sqrt{\frac{f'^2\lambda}{e}} \cdot \sqrt{q}$$

2. $r_q = 4 \cdot 10^{-2}\sqrt{q}$ et $r_0 = 0$, $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 2,8$ cm, $r_3 = 3,5$ cm et $r_4 = 4$ cm.



3. Quand $e \to 0$, le rayon des franges tend vers l'infini, la tache centrale brillante occupe tout l'écran, d'où la teinte plate (teinte de Newton en lumière blanche).

Exercice 15 $\boxed{\textbf{Rayon d'un anneau}}$

Les franges brillantes circulaires sont telles que $\delta = p\lambda$, p entier, soit $2e\cos i = p\lambda$ soit $\cos i = p\frac{\lambda}{2e}$. Dans les conditions de Gauss, i est un petit angle donc $\cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2}$ et le rayon r_p de l'anneau d'ordre d'interférence p vérifie

$$i \simeq \tan i = \frac{r_p}{f'} \quad \text{donc} \quad r_P = f'\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{p\lambda}{2e}}$$

Toutes les valeurs de p ne sont donc pas admissibles. Si on suppose $e > 0$, il faut que

$$\frac{p\lambda}{2e} \leq 1 \quad \text{soit} \quad p \leq \frac{2e}{\lambda}$$

L'application numérique donne $p \leq 2000$. Le rayon nul correspond à $p = 2000$, il y a donc une tache brillante au centre, et si on ne compte pas cette tache comme un anneau, le troisième anneau correspond à $p = 1997$ d'où $r_{1997} = 3,29$ cm.

Exercice 16 $\boxed{\textbf{Raie gaussienne}}$

1. D'après le cours, $\delta = 2e\cos i$.

2. Les bandes spectrales de largeur élémentaire $d\sigma$ sont deux à deux incohérentes. On somme donc les intensités lumineuses données par la formule de Fresnel :

$$dI = 2D_0\left[1+\cos(2\pi\sigma\delta)\right]e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2}d\sigma$$

$$\text{donc} \quad I(t) = \int_{\sigma=0}^{+\infty} 2D_0\left[1+\cos(2\pi\sigma\delta)\right]e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2}d\sigma$$

3. Cette intégrale est la somme de deux termes : $I(t) = J(t) + K(t)$.

$$J(t) = 2D_0\int_{\sigma=0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2}d\sigma$$

On fait le changement de variable $y = \frac{\sigma-\sigma_0}{a}$. On en déduit que $d\sigma = ady$ et que les bornes d'intégration sont $-\frac{\sigma_0}{a}$ et $+\infty$. Or $a \ll \sigma_0$ donc on peut assimiler l'intégrale à celle de $-\infty$ à $+\infty$:

$$J(t) = 2D_0\int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}ady = 2D_0a\sqrt{\pi}$$

d'après la relation donnée par l'énoncé.

$$K(t) = 2D_0\int_{\sigma=0}^{+\infty}\cos(2\pi\sigma\delta)e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2}d\sigma = 2D_0a\sqrt{\pi}e^{-\pi^2a^2\delta^2}\cos(2\pi\sigma_0\delta)$$

d'après la relation donnée par l'énoncé. On en déduit :

$$I(t) = 2D_0a\sqrt{\pi}\left[1+e^{-\pi^2a^2\delta^2}\cos(2\pi\sigma_0\delta)\right]$$

Or $\delta = 2e = 2v_0t$ donc

$$I(t) = 2D_0a\sqrt{\pi}\left[1+e^{-4\pi^2a^2v_0^2t^2}\cos(2\pi\cdot 2\sigma_0 v0t)\right]$$

On obtient bien la formule donnée par l'énoncé avec $I_0 = 2D_0a\sqrt{\pi}$, $\tau = \frac{1}{2\pi a v_0}$ et $T_0 = \frac{1}{2\sigma_0 v_0}$. Le rapport entre ces deux durées est

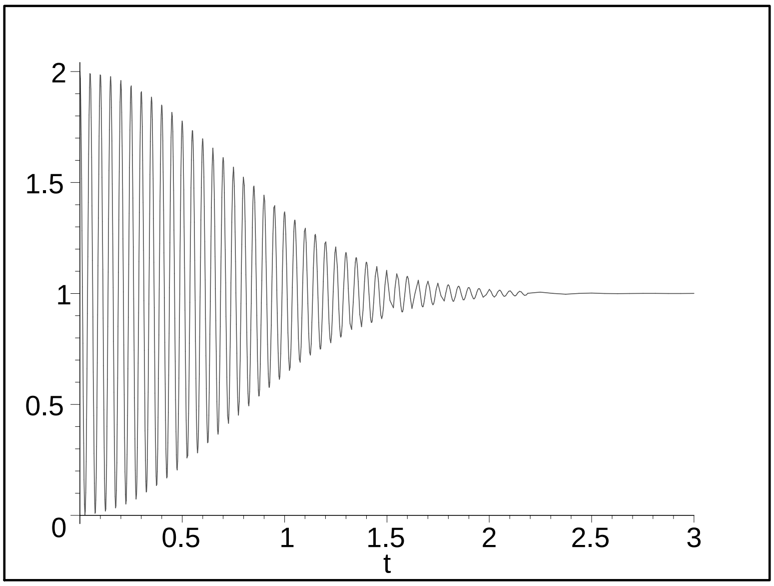
$$\frac{\tau}{T_0} = \frac{2\sigma_0 v_0}{2\pi a v_0} = \frac{\sigma_0}{\pi a} \gg 1$$

donc $T_0 \gg \tau$.

4. Le cosinus oscille donc très rapidement (avec une très petite période T_0) entre deux enveloppes :

$$I_0\left[1-e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\right] \le I(t) \le I_0\left[1+e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\right]$$

qui se rejoignent pour $t \simeq 2\tau$, date à laquelle on atteint le brouillage des franges. Voici l'allure de la courbe :


2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t

Exercice 17 $\boxed{\textbf{Mesure de l'indice de l'air}}$

Lorsque la cuve est emplie d'air, le rayon lumineux qui se réfléchit sur M_2 la traverse deux fois, à l'aller et au retour, soit un chemin optique égal à $2nb$. Lorsqu'elle est vide d'air, le chemin optique vaut $2b$. La différence de marche en lame d'air vaut donc respectivement

$$\delta_1 = \delta_0 + 2nb \quad \text{et} \quad \delta_2 = \delta_0 + 3b$$

Notons p l'ordre d'interférences au centre, on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{\delta_0 + 2nb}{\lambda_0} \\ p_2 = \frac{\delta_0 + 2b}{\lambda_0} \end{array} \right. \qquad \text{donc} \quad p_1 - p_2 = \frac{2(n-1)b}{\lambda_0}$$

On voit défiler 19 franges donc $p_1 - p_2 = 19$ donc

$$n_{\text{air}} = 1 + \frac{19\lambda_0}{2b} = 1 + 3,0 \cdot 10^{-4} = 1,00030$$

Exercice 18 $\boxed{\textbf{Spectre cannelé}}$
La condition énoncée dans le cours s'écrit

$$400 \cdot 10^{-9} \leq \frac{2e}{k+\frac{1}{2}} \leq 800 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{soit} \quad \frac{e}{400 \cdot 10^{-9}} \leq k + \frac{1}{2} \leq \frac{e}{200 \cdot 10^{-9}}$$

$$\text{soit} \quad \frac{e}{400 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{e}{200 \cdot 10^{-9}} + \frac{1}{2}$$

Le nombre de valeurs entières k entre ces deux bornes est égal au nombre de cannelures, soit

$$\frac{e}{200 \cdot 10^{-9}} - \frac{e}{400 \cdot 10^{-9}} = 11$$

donc $e = 4,4\ \mu\text{m}$.