Chapitre 2

Mécanique du solide

Exercice 1 **Pendule solide élastique**

Dans le référentiel galiléen du laboratoire, le solide est soumis à la liaison pivot, au poids qui s'exerce en G, point de l'axe de rotation Δ, donc de moment nul par rapport à Δ et au couple de rappel. La loi du moment cinétique s'écrit donc

$$\mathcal{M}_\Delta = \frac{dL_\Delta}{dt} \quad \text{donc} \quad -C\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

Cette équation différentielle est du type « oscillateur harmonique ». On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$; l'équation s'écrit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{donc} \quad \theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La période des oscillations est donc $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$.

Exercice 2 $\boxed{\textbf{Mise en rotation d'un rotor équilibré}}$

1. Dans le référentiel galiléen terrestre, le solide est soumis à la liaison pivot, au poids qui s'exerce en G, point de l'axe de rotation Δ, donc de moment nul par rapport à Δ, et aux couples moteur et de frottement. La loi du moment cinétique s'écrit donc

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \Gamma_0 + \Gamma_f \quad \text{soit} \quad J_\Delta \dot{\omega} = \Gamma_0 - \alpha\omega \quad \text{soit} \quad \dot{\omega} + \frac{\alpha}{J_\Delta}\omega = \frac{\Gamma_0}{J_\Delta}$$

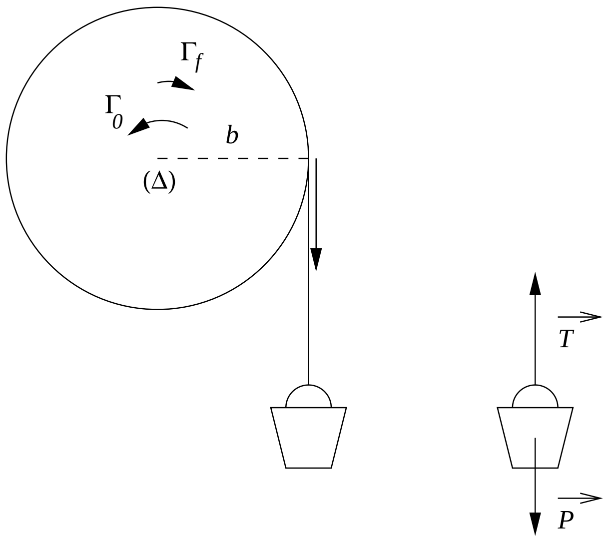
2. En régime permanent, ω est constante donc sa dérivée par rapport au temps est nulle, donc

$$0 = \Gamma_0 - \alpha\omega_{\text{lim}} \quad \text{soit} \quad \omega_{\text{lim}} = \frac{\Gamma_0}{\alpha}$$

L'équation différentielle a pour solution générale la somme d'une solution particulière $\omega_p = \omega_{\text{lim}}$ et de la solution générale de l'équation homogène :

$$\dot{\omega} + \frac{\alpha}{J_\Delta}\omega = 0 \quad \text{donc} \quad \omega_h = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J_\Delta}{\alpha}$$

3. Les notations sont celles du schéma suivant :



(a) La relation donnée par l'énoncé, divisée par dt, donne

$$\frac{dz}{dt} = b\frac{d\theta}{dt} \quad \text{soit} \quad \dot{z} = b\omega$$

(b) Dans le référentiel terrestre galiléen, le seau est soumis à son poids et à la force de tension de la corde, dirigée vers le haut. La loi de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$m\vec{a} = m\vec{g} + T\vec{u}_z \quad \text{soit} \quad m\ddot{z} = -mg + T \quad \text{donc} \quad T = mg + m\ddot{z}$$

(c) Dans le référentiel galiléen terrestre, le solide est soumis à la liaison pivot, à son poids qui s'exerce en G, point de l'axe de rotation Δ, donc de moment nul par rapport à Δ, aux aux couples moteur et de frottement et à la tension du fil $-T\vec{u}_z$ dont la droite d'application est le fil, son bras de levier est donc égal au rayon b. La loi du moment cinétique s'écrit donc

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \Gamma_0 + \Gamma_f \quad \text{soit} \quad J_\Delta \dot{\omega} = \Gamma_0 - \alpha\omega + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T})$$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{2}mb^2\dot{\omega} = -\alpha\omega + \Gamma_0 - T\cdot b$$

Or on a montré à la question (b) que $T = mg + m\ddot{z}$ et à la question (a) que $\dot{z} = b\omega$ donc

$$T = mg + mb\dot{\omega}$$

En remplaçant dans la loi du moment cinétique, on en déduit l'équation différentielle

$$\frac{3}{2}mb^2\dot{\omega} + \alpha\omega = \Gamma_0 - mgb$$

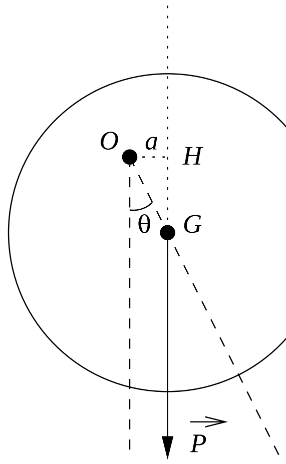
(d) Le seau, initialement immobile ($\omega = 0$), monte si $\dot{\omega} \geq 0$, donc si $\Gamma_0 - mgb$, soit $\Gamma_0 > mgb$ (condition nécessaire). Si cette condition est vérifiée, ω croît jusqu'à atteindre sa vitesse limite ω_{lim} vérifiant

$$0 + \alpha\omega_{\text{lim}} = \Gamma_0 - mgb \quad \text{soit} \quad \omega_{\text{lim}} = \frac{\Gamma_0 - mgb}{\alpha}$$

Le seau monte donc alors à vitesse angulaire constante (condition suffisante).

Exercice 3 $\boxed{\textbf{Pendule pesant en forme de disque épais}}$

Les notations sont celles du schéma suivant :



On a établi dans le cours que

$$Em = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta$$

En l'absence de frottement, elle se conserve au cours du mouvement et elle est donc égale à sa valeur à l'instant initial où $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ et $\theta(0) = 0$. On en déduit que

$$Em = \frac{3}{2}ma^2\omega_0^2 - mga$$

Le pendule peut atteindre $\theta = \pi$ et acquérir un mouvement révolutif si et seulement si

$$Em > mga \quad \text{soit} \quad \omega > \sqrt{\frac{4g}{3a}}$$

1. Si $\omega_0 \ll \sqrt{\frac{4g}{3a}}$, le mouvement est pendulaire. L'altitude maximale atteinte par G est définie par l'angle θ_1 : en écrivant la conservation de Em entre $(\theta_0 = 0, \dot{\theta}(0) = \omega_0)$ et $(\theta(t_1) = \theta_1, \dot{\theta}(t_1) = 0)$:

$$\frac{3}{2}ma^2\omega_0^2 - mga = -mga\cos\theta_1 \quad \text{soit} \quad \cos\theta_1 = 1 - \frac{3a}{2g}\omega_0^2$$

   Le mouvement est isochrone si $\theta_1 < 0,1$ rad donc si $\cos\theta_1 > \cos 0,1 = 0,995$ donc si

$$1 - \frac{3a}{2g}\omega_0^2 > 0,995 \quad \text{soit} \quad \omega_0 < \sqrt{0,0005 \cdot \frac{2g}{3a}} = 0,05\sqrt{\frac{4g}{3a}}$$

2. Si $0,05\sqrt{\frac{4g}{3a}} < \omega_0 < \sqrt{\frac{4g}{3a}}$, le mouvement est pendulaire non isochrone.

3. Si $\omega_0 > \sqrt{\frac{4g}{3a}}$, le mouvement est révolutif. L'énergie potentielle varie entre $-mga$ et $+mga$. Par conservation de l'énergie mécanique, l'énergie cinétique varie donc dans l'intervalle

$$Em - mga \leq Ec \leq Em + mga \quad \text{soit} \quad \frac{3}{2}ma^2\omega_0^2 - 2mga \leq \frac{3}{2}ma^2\omega^2 \leq \frac{3}{2}ma^2\omega_0^2$$

$$\text{donc} \quad \sqrt{\omega_0^2 - \frac{4g}{3a}} \leq \omega \leq \omega_0$$

4. Si $\omega_0 \gg \sqrt{\frac{4g}{3a}}$, le mouvement est révolutif et l'intervalle des vitesses angulaires est de largeur très faible devant ω_0 , donc le mouvement est à vitesse angulaire presque constante ω_0.

Exercice 4 **Glissement d'une valise sur le sol d'un train**

1. D'après le cours, la loi de Coulomb relative au glissement donne $T = \mu_d mg$.
2. Toujours d'après le cours, en situation de non-glissement, $T < \mu_s mg$.
3. Dans le référentiel non galiléen du train, la valise est soumise à son poids $\vec{P}$, à la force exercée par le sol qui se décompose en force tangentielle $\vec{T}$ et force tangentielle $\vec{T}$, et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f_{ie}} = -m\vec{A}$. Si la valise ne glisse pas, elle est en équilibre dans le réfrentiel du train, donc la loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{f_{ie}} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ -m \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} 0 \\ N \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} -T \\ 0 \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} mA \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\text{donc} \quad T = mA$$

Il y a non glissement si $T < \mu_s mg$ soit $mA < \mu_s mg$ soit $A < A_0$ avec $A_0 = \mu_s g$.

4. $A > A_0$ donc la valise glisse entre $t = 0$ et $t = \tau$, et $T = \mu_d N$. La loi de la quantité de mouvement appliqué à la valise dans le référentiel du train s'écrit

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{f_{ie}} = m\vec{a}_r \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 + 0 - \mu_s N + mA = m\ddot{x} \\ -mg + N + 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{donc} \quad N = mg \quad \text{et} \quad -\mu_d mg + mA = m\ddot{x} \quad \text{donc} \quad \ddot{x} = A - \mu_d g$$

Le mouvement de la valise est donc un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré ; sa vitesse initiale et son abscisse initiale sont nulles, d'où :

$$\dot{x}(t) = (A - \mu_d g)\, t \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2}(A - \mu_d g)t^2$$

À la fin de cette phase de freinage du train, la vitesse acquise par la valise et l'abscisse atteinte à la date $t = \tau$ sont donc

$$\dot{x}(\tau) = (A - \mu_d g)\, \tau \quad \text{et} \quad x(\tau) = \frac{1}{2}(A - \mu_d g)\tau^2$$

5. Le référentiel du train est galiléen pour $t > \tau$. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la valise pendant son glissement s'écrit comme à la question précédente, en remplaçant A par 0 :

$$\ddot{x} = -\mu_d g$$

et les conditions initiales coïncident (par continuité) avec les conditions finales de la phase précédente à la date $t = \tau$. On en déduit que pour $t > \tau$, tant que dure le glissement :

$$\dot{x}(t) = -\mu_d g t + K \quad \text{avec} \quad \dot{x}(\tau) = (A - \mu_d g)\, \tau$$

$$\text{donc} \quad K = \mu_d g\tau + (A - \mu_d g)\, \tau \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\mu_d g(t - \tau) + (A - \mu_d g)$$

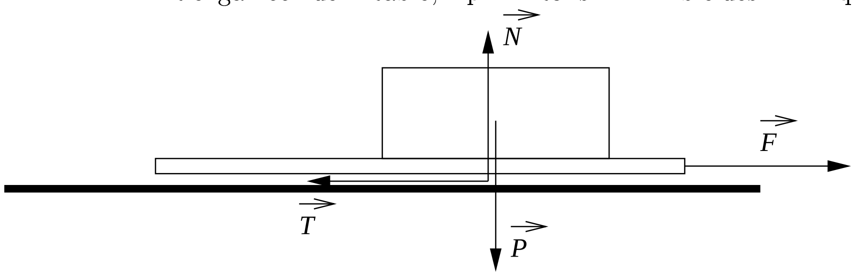
La valise s'arrête lorsque $\dot{x} = 0$ donc

$$-\mu_d g(t_a - \tau) + (A - \mu_d g) = 0 \quad \text{soit} \quad t_a = \frac{A\tau}{\mu_d g}$$

Cet arrêt est complet tant que le train est restera en mouvement de translation rectiligne uniforme, car la valise ne subit aucune force horizontale dans le référentiel du train, donc la loi de Coulomb du non-glissement est vérifiée.

Exercice 5 $\boxed{\textbf{Analyse d'une expérience}}$

– Si F est très faible, rien ne bouge. Considérons dans ce cas le système {feuille, gomme} de masse m. Dans le référentiel galiléen de la table, représentons l'ensemble des forces qu'il subit.



La loi de l'équilibre s'écrit $\vec{P}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{F}=\vec{0}$ donc en projections sur les deux axes :

$$\left\{\begin{array}{l} F-T=0 \\ -mg+N=0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} T=F \\ N=mg \end{array}\right.$$

La loi de Coulomb du non-glissement de la feuille sur la table est vérifiée si $T<\mu_0 N$ donc si $F<\mu_0 mg$.

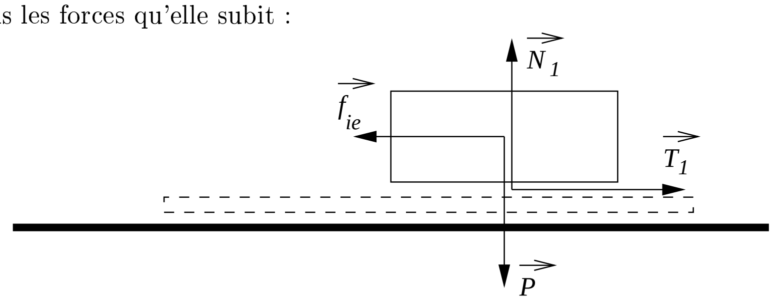
– Si F moyen, la feuille glisse et la gomme reste immobile sur la feuille. Considérons dans ce cas le système {feuille, gomme} de masse m. Dans le référentiel galiléen de la table, ce système subit les mêmes forces que dans le cas précédent. La loi de la quantité de mouvement s'écrit $\vec{P}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{F}=m\vec{a}$ où $\vec{a}$ est l'accélération commune de la feuille et de la gomme. En projections sur les deux axes, on a donc

$$\left\{\begin{array}{l} F-T=ma \\ -mg+N=0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} ma=F-T \\ N=mg \end{array}\right.$$

La loi de Coulomb relative au glissement de la feuille sur la table donne $T=\mu_0 N$ donc

$$ma=F-\mu_0 mg$$

a est donc positive si $F>\mu_0 mg$. Considérons maintenant le système formé de la gomme seule : elle est en équilibre dans le référentiel non galiléen de la feuille d'accélération $\vec{a}=a\vec{u}_x$. Représentons les forces qu'elle subit :



La loi de l'équilibre de la gomme s'écrit $\vec{P}+\vec{N}_1+\vec{T}_1+\vec{f}_{ie}=\vec{0}$ donc en projections sur les deux axes :

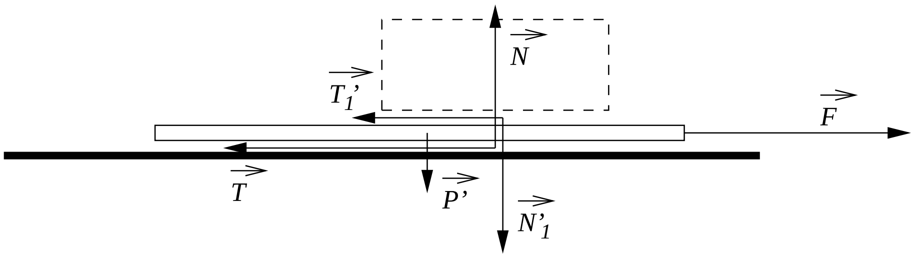
$$\left\{\begin{array}{l} T_1-ma=0 \\ -mg+N_1=0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} T_1=ma=F-\mu_0 mg \\ N_1=mg \end{array}\right.$$

La loi de Coulomb du non-glissement de la gomme sur la feuille est vérifiée si $T_1<\mu_1 N_1$ donc si

$$F-\mu_0 mg<\mu_1 mg \quad \text{soit} \quad F<(\mu_0+\mu_1)mg$$

Cette situation est donc réalisée si $\mu_0 mg<F<(\mu_0+\mu_1)mg$

– Pour F fort, la feuille glisse et la gomme recule par rapport à la feuille. On est donc dans le cas où $F>(\mu_0+\mu_1)mg$. La force d'inertie subie par la gomme dans le référentiel de la feuille est alors plus importante que la force tangentielle, et la gomme recule effectivement par rapport à la feuille. Comme la feuille et la gomme ne sont plus solidaires, on doit raisonner sur le système formé de la feuille seule. Elle subit de la part de la gomme une force opposée à celle exercée par la feuille sur la gomme. Représentons l'ensemble des forces.



Notons m' la masse de la feuille ; la loi de la quantité de mouvement appliquée à la feuille s'écrit $\vec{P}' + \vec{N}'_1 + \vec{N} + \vec{T}'_1 + \vec{T} + \vec{F} = m'\vec{a}'$ et en projections sur les axes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -T'_1 - T + F = m'a' \\ -m'g + N - N'_1 = 0 \end{array} \right.$$

En écrivant l'équilibre de la gomme sur l'axe vertical, $N'_1 = mg$ donc $N = (m+m')g \simeq mg$ car la masse de la feuille est très faible devant celle de la gomme. Les lois de Coulomb traduisant le glissement simultané de la feuille sur la table et de la gomme sur la feuille entraînent que

$$T = \mu_0 N = \mu_0 mg \quad \text{et} \quad T'_1 = \mu_1 N'_1 = \mu_1 mg$$

On en déduit que

$$m'a' = F - (\mu_0 + \mu_1)mg$$

et a' est bien positif sit $F > (\mu_0 + \mu_1)mg$.

- Pour F très fort, il est possible de retirer la feuille alors que la gomme ne bouge presque pas par rapport à la table. Le calcul précédent donne l'accélération de la feuille :

$$a' = \frac{F - (\mu_0 + \mu_1)mg}{m'}$$

La gomme, elle, est soumise à son poids et à la force normale qui se compensent et à la force tangentielle $\vec{T}_1 = \mu_1 mg$ donc son accélération dans le référentiel de la table est $\vec{a} = a\vec{u}_x$ avec $\mu_1 mg = ma$ donc $a = \mu_1 g$.

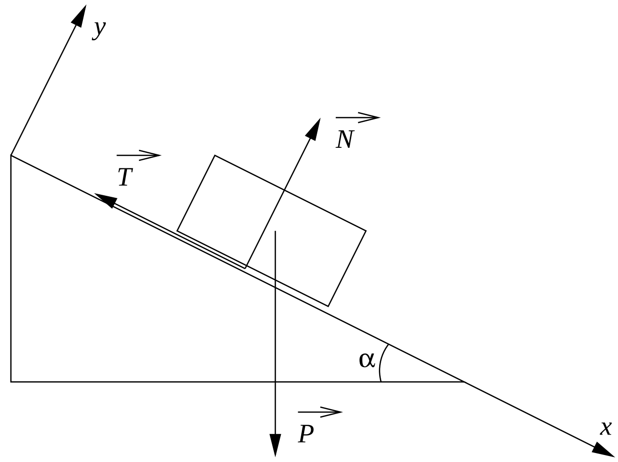
- Si $F \gg (\mu_0 + \mu_1)mg$, alors $a' \simeq \frac{F}{m'}$, et $a = \mu_1 g$. Calculons le rapport entre ces deux accélérations :

$$\frac{a}{a'} = \frac{\mu_1 g}{\frac{F}{m'}} = \frac{\mu_1 mg}{F} \cdot \frac{m'}{m}$$

Or $F \gg (\mu_0 + \mu_1)mg$ donc a fortiori $F \gg \mu_1 mg$ et $m' \ll m$ donc $a \ll a'$. L'accélération de la feuille est donc très supérieure à celle de la gomme dans le référentiel de la table. Elle se retirera donc très vite de sous la gomme, et à partir de là, la gomme ne subit plus aucune force horizontale : elle tombe sur la table, et s'arrête donc presque instantanément, on a donc l'impression que la gomme n'a presque pas bougé.

Exercice 6 **Équilibre d'un pavé sur un plan incliné**

1. Les notations sont celles du schéma suivant :



Dans le référentiel terrestre galiléen, l'équilibre du pavé entraîne la nullité de la somme des forces :

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{N}=\vec{0} \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{l} mg\sin\alpha - T + 0 = 0 \\ -mg\cos\alpha + 0 + N = 0 \end{array}\right. \qquad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{array}\right.$$

La loi de Coulomb relative au non-glissement s'écrit

$$T < \mu_s N \quad \text{soit} \quad mg\sin\alpha < \mu_s mg\cos\alpha \quad \text{donc} \quad \tan\alpha < \mu_s$$

Or $\tan\alpha = \tan 20° = 0,364$ et $\mu_s = 0,30$ donc l'hypothèse n'est pas validée.

2. La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{N}=m\vec{a}_G \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{l} mg\sin\alpha - T + 0 = m\ddot{x} \\ -mg\cos\alpha + 0 + N = 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que $N = mg\cos\alpha$. Or la loi de Coulomb pour le glissement s'écrit $T = \mu_d N$ donc $T = \mu_d mg$ et l'équation différentielle s'écrit

$$mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = m\ddot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} = g\left(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha\right)$$

3. Le pavé a donc un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré :

$$\ddot{x} = 1,050 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad \text{donc} \quad x(t) = 0,525t^2$$

Exercice 7 $\boxed{\textbf{Déplacement d'une armoire}}$

L'armoire est soumise à la force du déménageur $\vec{F}$, à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force du sol qui se décompose en une force normale $\vec{N}$ et une force tangentielle $\vec{T}$. Notons $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans la direction et le sens du déplacement, $\vec{v}$ le vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut. Pendant un déplacement à vecteur-vitesse constant, la loi de la quantité de mouvement appliqué à l'armoire dans le référentiel galiléen de la pièce s'écrit

$$-mg\vec{v} + F\vec{u} + N\vec{v} - T\vec{u} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} N = mg \\ F = T \end{array} \right.$$

La loi de Coulomb relative au glissement s'écrit $T = \mu_d N$ donc $F = \mu_d mg$. Le travail élémentaire du déménageur pour un déplacement $d\overrightarrow{OM} = d\ell\vec{u}$ est

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = F\vec{u} \cdot d\ell\vec{u} = F \cdot d\ell$$

donc pour un déplacement de longueur totale $\mathcal{L}$:

$$W = F \cdot \mathcal{L} = \mu_d mg\mathcal{L}$$

Plus l'armoire est lourde, plus le coefficient de frottement dynamique μ_d est grand et plus la longueur $\mathcal{L}$ du déplacement est grande, plus le déplacement demande un travail important, et plus il sera fatiguant.

Exercice 8 $\boxed{\textbf{Machine d'Attwood}}$

1. **Méthode dynamique**.

(a) Le fil inextensible donc quand M_2 descend de dz, M_1 avance de dx :

$$dz = dx \quad \text{donc} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad \text{soit} \quad \dot{z} = \dot{x}$$

(b) Dans le référentiel galiléen du laboratoire, appliquons la loi de la quantité de mouvement à chacun des deux mobiles.

$$\begin{cases} F - T_1 = m\ddot{x} \\ N_1 - mg = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad -F + mg = m\ddot{z}$$

La loi de Coulomb relative au glissement de M_1 donne $T_1 = \mu_d N_1 = \mu_d mg$ donc

$$\begin{cases} F - \mu_d mg = m\ddot{x} \\ -F + mg = m\ddot{z} = m\ddot{x} \end{cases} \quad \text{donc} \quad (1-\mu_d)mg = 2m\ddot{x}$$

$$\text{soit} \quad \ddot{x} = (1-\mu_d)\frac{g}{2}$$

Les deux mobiles ont donc des mouvements de translation rectiligne uniformément accéléré :

$$\dot{x} = \dot{z} = (1-\mu_d)\frac{gt}{2} \quad \text{et} \quad x(t) = z(t) = (1-\mu_d)\frac{gt^2}{4}$$

(c) D'après l'énoncé, M_2 touche le sol lorsque

$$z(t_a) = d \quad \text{soit} \quad d = (1-\mu_d)\frac{gt_a^2}{4} \quad \text{donc} \quad t_a = \sqrt{\frac{4d}{(1-\mu_d)g}}$$

À cette date, la vitesse acquise par M_1 est

$$v_a = \dot{x}(t_a) = (1-\mu_d)\frac{gt_a}{2} = (1-\mu_d)\frac{g}{2}\sqrt{\frac{4d}{(1-\mu_d)g}}$$

(d) Le solide M_1 n'est plus soumis à F. La loi de la quantité de mouvement s'écrit alors

$$\begin{cases} -T_1 = m\ddot{x} \\ N_1 - mg = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad -\mu_d mg = m\ddot{x} \quad \text{donc} \quad \ddot{x} = -\mu_d g$$

M_1 a donc un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré. Par continuité de ces deuxgrandeurs, son abscisse initiale à $t' = 0$ (donc à $t = t_a$) est $x(t' = 0) = d$ et sa vitesse initiale à $t' = 0$ (donc à $t = t_a$) est $\dot{x}(t' = 0) = v_a$. On en déduit que

$$\dot{x}(t') = -\mu_d g t' + v_a \quad \text{et} \quad x(t') = -\frac{1}{2}\mu_d g t'^2 + v_a t' + d$$

(e) La date d'arrêt de M_1 est définie par $\dot{x}(t_b) = 0$ soit

$$-\mu_d g t_b + v_a \quad \text{donc} \quad t_b = \frac{v_a}{\mu_d g}$$

(f) À la date t_b, par définition, $x(t' = t_b) = D$ donc

$$D = -\frac{1}{2}\mu_d g t_b^2 + v_a t_b + d = -\frac{1}{2}\mu_d g \cdot \frac{v_a}{\mu_d g} + v_a \cdot \frac{v_a}{\mu_d g} = \frac{v_a^2}{2\mu_d g} + d$$

$$\text{donc} \quad D - d = (1-\mu_d)^2\frac{g^2}{4} \cdot \frac{4d}{(1-\mu_d)g} \cdot \frac{1}{2\mu_d g} = d\frac{1-\mu_d}{\mu_d}$$

$$\text{donc} \quad \mu_d D - \mu_d d = d - \mu_d d \quad \text{donc} \quad \mu_d = \frac{d}{D}$$

2. **Méthode énergétique**. L'énergie mécanique du système formé des deux solides est $Em = Ec_1 + Ec_2 + Ep_{p1} + Ep_{p2}$. À l'instant initial, comme à l'instant final, les deux solides sont immobiles donc leurs énergies cinétiques sont nulles. Prenons la référence des énergies potentielles de pesanteur nulle sur le support pour M_1 et nulle sur le sol pour M_2. Les énergies mécaniques initiale et finale du système valent donc :

$$Em_i = 0 + 0 + 0 + mgd = mgd \quad \text{et} \quad Em_f = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Pour $t \in [0, t_a]$, lorsque M_1 avance de dx et M_2 descend de dz, le travail élémentaire de la force de tension du fil vaut

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = (F\vec{u}_x) \cdot (dx\vec{u}_x) + (-F\vec{u}_z) \cdot (dz\vec{u}_z) = F(dx - dz) = 0$$

Le travail de la force tangentielle $\vec{T_1}$ lors du glissement de M_1 sur le support est, d'après le cours :

$$W(\vec{T_1}) = -T_1 \cdot D = -\mu_d mgd$$

La loi de l'énergie mécanique s'écrit donc

$$Em_f - Em_i = W(\vec{T_1}) \quad \text{soit} \quad 0 - mgd = -\mu_d mgd$$

et on retrouve la même relation qu'à la première question : $\mu_d = \frac{d}{D}$.