Exercice 12.1

On commence par permuter les lignes L_1 et L_3. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On fait ensuite

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1. \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on fait $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha \\ 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée, on doit donc déterminer si les coefficients diagonaux sont nuls ou non. On a :

$$2 - \alpha - \alpha^2 = 0 \iff \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -2.$$

Si $\alpha = 1$, la matrice échelonnée possède deux lignes nulles, elle est donc de rang 1.
Si $\alpha = -2$, la matrice échelonnée possède deux lignes non nulles, elle est donc de rang 2. Enfin, si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -2$, la matrice est triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls, elle est donc de rang 3.

Exercice 12.2

On remarque que $C_1 = C_3 = -C_4$, la matrice de taille 4 est donc de rang inférieur ou égal à 2. Comme il existe deux colonnes non colinéaires, le rang vaut au moins 2 donc il est égal à 2.

Exercice 12.3

On a $C_1 + C_2 = C_4$, le rang est donc strictement inférieur à 4 ce qui montre que la matrice n'est pas inversible.

Exercice 12.4

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, l'équation :

$$AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

admet-elle des solutions ? On étudie le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2z = a \\ -y + z = b \\ x - 2y = c. \end{cases}$$

En faisant $L_3 \leftarrow -L_3 + L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x + 2z = a \\ -y + z = b \\ 2y + 2z = a - c. \end{cases}$$

En faisant $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ on obtient :

$$\begin{cases} x + 2z = a \\ -y + z = b \\ 4z = a - c + 2b. \end{cases}$$

Le système est triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls, il possède donc une unique solution. On en déduit que la matrice est inversible. Pour déterminer son inverse, on résout le système, on trouve :

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{4}c \\[2ex] y = z - b = \dfrac{1}{4}a - \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{4}c \\[2ex] x = a - 2z = \dfrac{1}{2}a - b + \dfrac{1}{2}c, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}a - b + \dfrac{1}{2}c \\[2ex] y = \dfrac{1}{4}a - \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{4}c \\[2ex] z = \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{4}c. \end{cases}$$

On en déduit :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $AA^{-1} = \mathrm{I}_3$.

Exercice 12.5

On résout le système associé :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y+z & = & a \\ 2x-3y+2z & = & b \\ -x+2y & = & c. \end{array}\right.$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} z+2x-2y=a \\ -2x+y=b-2a \\ -x+2y=c. \end{array}\right.$$

On fait ensuite :

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3, \end{array}$$

on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} z+2x-2y=a \\ -x+2y=c \\ -3y=b-2a-2c. \end{array}\right.$$

Le système est triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls, on peut donc affirmer que la matrice est inversible. Pour déterminer son inverse, on résout le système. On trouve :

$$\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{3}b+\dfrac{2}{3}c \\[2ex] x=2y-c=\dfrac{4}{3}a-\dfrac{2}{3}b+\dfrac{1}{3}c \\[2ex] z=a-2x+2y=-\dfrac{1}{3}a+\dfrac{2}{3}b+\dfrac{2}{3}c, \end{array}\right.$$

soit encore :

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3}a-\dfrac{2}{3}b+\dfrac{1}{3}c \\[2ex] y=\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{3}b+\dfrac{2}{3}c \\[2ex] z=-\dfrac{1}{3}a+\dfrac{2}{3}b+\dfrac{2}{3}c. \end{array}\right.$$

On en déduit que :

$$M^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier que $MM^{-1}=\mathrm{I}_3$.

Exercice 12.6

On écrit :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On permute les lignes 2 et 3 :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pour éliminer les coefficients au-dessus de la diagonale, on fait

$$L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3 :$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Il ne reste plus qu'à diviser la première ligne par -2 et les deux suivantes par 2 :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0. \end{array}\right)$$

On en déduit que l'inverse de la matrice est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier que le produit de la matrice et de son inverse vaut la matrice identité.

Exercice 12.7

1) On a

$$A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors que $A^2-3A+2\mathrm{I}_3$ est la matrice nulle.

2) On a donc :

$$A(A-3\mathrm{I}_3)=-2\mathrm{I}_3$$

ce qui se réécrit :

$$A\left(-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}\mathrm{I}_3\right)=\mathrm{I}_3.$$

On en déduit que :

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(3\mathrm{I}_3-A)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&5&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 12.8

1) On pose $B=A+\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

On a :

$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

et B^3 est la matrice nulle.

2) On écrit $A=B-\mathrm{I}_3$. On utilise la formule du binôme de Newton, car les matrices B et $-\mathrm{I}_3$ commutent. Pour $n\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}A^n &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k(-\mathrm{I}_3)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}B^k(-1)^{n-k},\end{aligned}$$

car B^k est nulle pour tout k supérieur ou égal à 3 et $(-\mathrm{I}_3)^{n-k}=(-1)^{n-k}\mathrm{I}_3$. On a donc :

$$\begin{aligned}A^n=(-1)^n\mathrm{I}_3+nB(-1)^{n-1}\\+\frac{n(n-1)}{2}B^2(-1)^{n-2},\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$A^n=(-1)^n\left(\mathrm{I}_3-nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2\right).$$

On en déduit que, $\forall n\geq 2$:

$$A^n=(-1)^n\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\\frac{n(n-1)}{2}&-n&1\end{pmatrix}.$$

On remarque que cette formule est encore valable pour $n=0$ et $n=1$, elle est donc valable pour tout entier $n\in\mathbf{N}$.

Exercice 12.9

1) On a $A^2=3A$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que, $\forall n\geq 1$:

$$A^n=3^{n-1}A.$$

2) On écrit $B=A-\mathrm{I}_3$. Soit $n\geq 1$. On applique la formule du binôme de Newton car A et I_3 commutent :

$$B^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k(-1)^{n-k}.$$

On sait que pour tout $k\geq 1$, on a $A^k=3^{k-1}A$. On a donc :

$$\begin{aligned}&B^n\\&=(-1)^n\mathrm{I}_3+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^k(-1)^{n-k}\\&=(-1)^n\mathrm{I}_3+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}A(-1)^{n-k}.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}(-1)^{n-k}\\=\;&\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}\\=\;&\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}-(-1)^n\right).\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}=(3-1)^n=2^n,$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}(-1)^{n-k}=\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right).$$

On a donc, $\forall n\geq 1$:

$$B^n=(-1)^n\mathrm{I}_3+\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)A.$$

On vérifie que cette formule est également vraie pour $n=0$.

Exercice 12.10

1) On doit tout d'abord calculer l'inverse de P. Pour cela, on va résoudre le système associé à P :

$$\left\{\begin{array}{r} x+y-z=a \\ x-y+z=b \\ -x+y+z=c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a+c}{2} \\ z=\dfrac{b+c}{2} \end{array}\right. .$$

On a donc $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

On calcule le produit :

$$\begin{aligned} P^{-1}D &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&3&0\\2&0&4\\0&3&4\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} &P^{-1}DP \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&3&0\\2&0&4\\0&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

2) Pour tout entier n, on a :

$$A^n = P^{-1}D^nP,$$

avec :

$$D^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix},$$

donc :

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^n+3^n&2^n-3^n&3^n-2^n\\2^n-4^n&2^n+4^n&4^n-2^n\\3^n-4^n&4^n-3^n&3^n+4^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 12.11

1) On applique la formule du produit matriciel. On commence par calculer le coefficient $(AE_{ij})_{rs}$ d'indice (r,s) de la matrice AE_{ij}. Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{rk}\,(E_{ij})_{ks}\,.$$

Or, le coefficient d'indice (k,s) de E_{ij} est nul sauf si $i=k$ et $s=j$. On en déduit que :

$$(AE_{ij})_{rs}=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } s\neq j \\ a_{ri} & \text{si } s=j. \end{array}\right.$$

On calcule maintenant le coefficient $(AE_{ij}B)_{rl}$ d'indice (r,l) de la matrice $AE_{ij}B$. Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n}(AE_{ij})_{rk}\,b_{kl}.$$

Seul le terme d'indice $k=j$ est non nul, on a donc :

$$(AE_{ij}B)_{rl}=a_{ri}b_{jl}.$$

2) Supposons par l'absurde que B et A sont non nulles. Alors, il existe deux coefficients $a_{i_0j_0}$ et $b_{i_1j_1}$ non nuls. On considère alors le produit matriciel $AE_{j_0i_1}B$. Par hypothèse, ce produit matriciel est nul. Or, d'après le calcul précédent, le coefficient d'indice (i_0,j_1) de la matrice $AE_{j_0i_1}B$ est égal à $a_{i_0j_0}b_{i_1j_1}$, il est donc nul ce qui est une contradiction. On a montré, par l'absurde, que A ou B est la matrice nulle.

Exercice 12.12

On utilise la formule du produit matriciel. Le coefficient $(AB)_{ij}$ d'indice (i,j) du produit AB est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}b_{kj},$$

car A est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On calcule maintenant le coefficient d'indice (i,j) du produit matriciel ABA :

$$\sum_{l=1}^{n}(AB)_{il}\,a_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{kl}.$$

On a montré que tous les coefficients du produit matriciel ABA sont identiques, égaux à la somme de tous les coefficients de B. Si on note s la somme de tous les coefficients de B, on a donc :

$$ABA = sA$$

puis :

$$\operatorname{tr}(ABA) = s\operatorname{tr}(A) = ns.$$

Exercice 12.13

Commençons par calculer A^2 :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} E_{j,j+1}\right) \\
&= \sum_{i,j} E_{i,i+1}E_{j,j+1} \\
&= \sum_{i,j} E_{i,j+1}\delta_{i+1,j} \text{ d'après } [\mathbf{S12.2}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i+2},
\end{aligned}$$

car $\delta_{i+1,j} = 0$ lorsque $i+1 \neq j$ et vaut 1 quand $i+1 = j$. On a alors $j+1 = i+2$. Par une récurrence immédiate, on a :

$$A^k = \sum_{i=1}^{n-k} E_{i,i+k}.$$

On a donc :

$$A^{n-1} = E_{1n},$$

et, pour $k > n-1$, $A^k = (0)$. On en déduit que :

$$A^k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} E_{i,i+k} \text{ si } k \leq n-1 \\ (0) \text{ si } k \geq n. \end{cases}$$