Chapitre 1

L'espace-temps de la relativité restreinte

La *relativité générale* est une théorie de la gravitation qui se substitue à celle de Newton. On a tendance actuellement à parler de *gravitation relativiste* plutôt que de relativité générale. Cependant, comme celle-ci constitue la suite de la relativité restreinte, il semble logique de conserver l'appellation traditionnelle, l'ensemble des relativités restreinte et générale formant la *théorie de la relativité.*

La relativité restreinte considère que les phénomènes physiques sont décrits dans un cadre infini à quatre dimensions formé par l'union inséparable de l'espace géométrique et du temps, appelé l'*espace-temps*. La matière n'apparaît pas pour influer sur la structure même de ce cadre et les effets gravitationnels sont ainsi supposés négligeables.

Par contre, la relativité générale va introduire la matière et l'énergie dans l'espace-temps relativiste pour le modifier considérablement. Selon la formule lapidaire de Thibault Damour dans son ouvrage consacré à Albert Einstein [Da1], la théorie de la relativité générale peut être résumée en une phrase :

L'Espace-Temps est une structure élastique qui est déformée par la présence, en son sein, de Masse-Energie.

Nous verrons que l'étude de cette *déformation* conduit effectivement aux équations fondamentales d'Einstein. Pour y aboutir, il faut cependant parcourir un long chemin. Il faut également bien connaître la théorie de la relativité restreinte dont nous rappelons les résultats essentiels au cours de ce chapitre.

1.1 FONDEMENTS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

La relativité restreinte fut créée au début du 20^e siècle en se basant sur un phénomène particulier : les ondes électromagnétiques. En cherchant l'invariance des équations de Maxwell, Lorentz et Poincaré [Po1] aboutirent aux formules relativistes de passage des coordonnées d'espace et de temps entre deux référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Ces formules fondamentales de la relativité restreinte constituent la *transformation de Lorentz-Poincaré*.

De son côté, Einstein [Ei1] postula l'invariance de la vitesse de la lumière d'une source par rapport à tout référentiel en translation uniforme ce qui lui permit d'aboutir également à cette transformation fondamentale. Ce postulat sur la lumière est encore largement utilisé pour l'enseignement de la relativité restreinte alors qu'il pose un problème essentiel qui est complètement occulté.

La relativité restreinte impose en effet une loi universelle à tous les phénomènes physiques. Pourquoi la lumière jouerait-elle un rôle majeur dans des phénomènes qui n'ont aucun rapport avec elle ? Pourquoi les rapports fondamentaux entre l'espace et le temps dépendraient-ils *a priori* d'un phénomène électromagnétique particulier ?

1.1.1 Postulats de Poincaré-Einstein

Ce fondement électromagnétique de la relativité restreinte fut critiqué dès 1910 et divers travaux de recherche réalisés au cours du 20^e^ siècle montrèrent la possibilité de postulats basés uniquement sur des propriétés de l'espace et du temps. Jean-Marc Lévy-Leblond retrouva ces résultats [Lé1] et milita pour rénover l'enseignement des bases de la relativité restreinte. Dans notre ouvrage, *Introduction à la relativité restreinte* [Hl1], nous avons repris ces « nouveaux » postulats qui sont extrêmement simples et naturels.

1. *Principe de relativité* : les lois des phénomènes physiques doivent être les mêmes, soit pour un observateur fixe, soit pour un observateur entraîné dans un mouvement de translation uniforme.

2. *L'espace est homogène* : l'espace a les mêmes propriétés en chaque point. Autrement dit, l'espace est invariant par translation ; les origines de l'espace sont arbitraires pour l'expression des lois physiques.

3. *L'espace est isotrope* : toutes les directions dans l'espace sont physiquement équivalentes. Autrement dit, après rotation dans l'espace d'un référentiel, celui-ci reste équivalent au référentiel d'origine.

4. *Le temps est homogène* : le temps est identique en tout point d'un même référentiel. Toutes les horloges d'un référentiel donné doivent être strictement réglées à la même heure.

5. *Principe de causalité* : tout phénomène physique peut être relié à une cause. Ce postulat est celui de l'existence même des lois de la nature.

Nous appelons *postulats de Poincaré-Einstein* les cinq postulats ci-dessus. On voit qu'ils ne font aucune référence à un phénomène physique particulier.

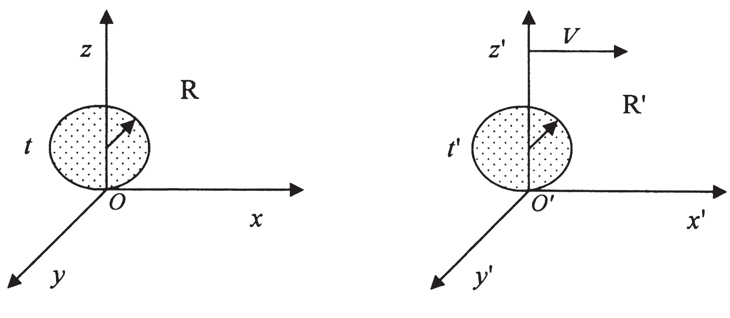

Figure 1.1

1.1.2 Transformation de Lorentz-Poincaré

Partant des postulats de Poincaré-Einstein, le problème est d'établir des relations entre les coordonnées de deux systèmes de référence en translation à vitesse constante l'un par rapport à l'autre. Pour cela, considérons les deux référentiels schématisés sur la figure 1.1.

Les deux référentiels R et R' ont respectivement pour coordonnées spatiales x, y, z et x', y', z', et pour coordonnée temporelle t et t'. Le référentiel R' se déplace par rapport à R à la vitesse constante V le long d'un axe Ox ; c'est un référentiel d'inertie. On suppose que le point O' de R' est passé au temps $t = 0$ au point O.

Les relations entre les coordonnées d'espace et de temps des référentiels R et R' sont obtenues en utilisant les postulats de la relativité restreinte énoncés ci-dessus. Leur démonstration aboutit à la mise en évidence d'une vitesse limite lors de l'addition des vitesses de plusieurs référentiels. Cette vitesse limite est appelée *constante de structure de l'espace-temps*. Elle est identifiée à la plus grande vitesse mesurée qui est celle de la vitesse de la lumière dans le vide, notée c.

Finalement, le principe de relativité est vérifié par les lois physiques si l'on effectue la transformation suivante, appelée *transformation spéciale de Lorentz-Poincaré* :

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) \;; \quad y' = y \;; \quad z' = z \;; \quad t' = \gamma(V)(t - Vx/c^2) \qquad (1.1.1)$$

avec :

$$\gamma(V) = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} \qquad (1.1.2)$$

Cette transformation se généralise pour des référentiels ayant des vitesses relatives uniformes dans une direction quelconque. Les formules correspondantes constituent la *transformation de Lorentz-Poincaré*.

1.1.3 Formule de composition des vitesses

Considérons un troisième référentiel R'' qui est en translation uniforme par rapport à R' à la vitesse U. La vitesse de R'' par rapport au référentiel R, notée W, est donnée par :

$$W = (V + U)/(1 + VU/c^2) \qquad (1.1.3)$$

Cette loi de composition des vitesses montre que si l'une des vitesses composantes V ou U est égale à c, la vitesse résultante W est toujours égale à c. La constante de structure de l'espace-temps apparaît comme une vitesse qu'on ne peut dépasser.

Remarquons que la loi relativiste de composition des vitesses s'identifie à la loi galiléenne de la mécanique classique pour de faibles vitesses V et U par rapport à c. Cette nouvelle loi montre que la mécanique newtonienne doit être généralisée.

1.2 INVARIANTS DE L'ESPACE-TEMPS PLAT

La transformation de Lorentz-Poincaré montre que l'espace et le temps sont inséparables. Tout phénomène physique élémentaire, appelé *événement*, a lieu dans l'espace à un instant donné et il est déterminé par trois coordonnées d'espace et une de temps.

1.2.1 Espace-temps plat

La position d'un point M immobile dans l'espace, représentant le lieu d'un événement, peut être déterminé par trois coordonnées x, y, z. Pour chaque point M, il existe en son voisinage un nombre quelconque d'autres points dont la position peut être déterminée par des coordonnées aussi voisines que l'on veut de celles de *M*. On dit que l'espace est un *continuum* à trois dimensions.

Le temps, *t*, est également une variable continue. Tous les événements physiques sont déterminés par quatre coordonnées continues, *x, y, z, t*. L'espace ponctuel formé par l'ensemble des points dans lequel se situent tous les événements déterminés par quatre coordonnées constitue un continuum qui est appelé l'*espace-temps*.

L'espace-temps de la relativité restreinte est *plat*. Nous verrons plus précisément cette notion par la suite par opposition aux espaces courbes ; la *courbure* d'un espace plat est nulle. Dans l'espace-temps plat, les rayons lumineux suivent des droites ; un rayon lumineux dont la source suit une ligne droite se déplace dans un plan.

1.2.2 Vitesse de propagation des interactions

L'invariant fondamental de l'espace-temps est la *constante de structure de l'espace-temps*. Cet invariant est identifié à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. C'est également la vitesse de propagation des interactions gravifiques.

Cet invariant résulte directement du principe de relativité qui nécessite d'une part l'*existence* d'une vitesse limite des interactions et une vitesse limite *identique* dans tous les référentiels d'inertie. Il permet de mettre en évidence un autre invariant de l'espace-temps, c'est-à-dire une grandeur qui reste inchangée par une transformation de Lorentz-Poincaré, appelée *intervalle entre deux événements*.

1.2.3 Intervalle entre deux événements

Dès 1905, Henri Poincaré [Po2] démontra qu'il existe une quantité invariante sous l'action d'une transformation de Lorentz-Poincaré. La racine carrée de cet invariant a été appelée par la suite intervalle entre deux événements.

Considérons un premier événement A_1 quelconque repéré dans l'espace-temps par les coordonnées x, y, z, t dans un référentiel R. Un second événement A_2 infiniment proche a pour coordonnées $x + dx, y + dy, z + dz, t + dt$. Formons la quantité suivante :

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{1.2.1}$$

La quantité infinitésimale ds est l'intervalle entre les deux événements A_1 et A_2. Si l'on considère un second référentiel R' en translation uniforme par rapport à R, dans lequel ces mêmes événements sont repérés, on peut écrire l'expression de l'intervalle ds' en fonction des coordonnées de R'. L'application de la transformation de Lorentz-Poincaré permet de transformer l'expression (1.2.1) en fonction des coordonnées de R'. On démontre ainsi que $ds^2 = ds'^2$. De plus, le ds^2 est invariant par translation, rotation spatiale et retournements d'espace et de temps.

L'intervalle entre deux événements est donc un invariant de l'espace-temps de la relativité restreinte.

1.2.4 Durée propre

Considérons toujours nos deux référentiels schématisés sur la figure 1.1. Une horloge H' est fixe dans R' ; elle se déplace par rapport à R durant un temps *dt*, d'une distance dl telle que : $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = V^2dt^2$. Cette horloge étant fixe dans R', sa position n'aura pas varié durant ce temps, d'où : $dx' = dy' = dz' = 0$.

Notons τ le temps mesuré par l'horloge H' de R'. L'intervalle ds' dans R' correspondant au déplacement infinitésimal dl de l'horloge dans R se réduit donc à : $ds' = cd\tau$. L'invariance de l'intervalle nous permet alors d'écrire, selon (1.2.1) :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = (c^2 - V^2)dt^2 = ds'^2 = c^2d\tau^2 \tag{1.2.2}$$

Cette dernière relation donne l'expression de la durée mesurée par l'horloge H' fixe dans le référentiel R' :

$$d\tau = dt/\gamma(V) \tag{1.2.3}$$

Par définition, le temps mesuré par une horloge fixe en un point d'un référentiel est appelé le *temps propre* du référentiel ; le temps propre sera toujours noté par la suite par la lettre grecque τ. Ce temps est celui que mesurerait une horloge qui serait attachée à une particule se déplaçant dans l'espace-temps.

La durée $d\tau$ est un intervalle de temps appelé *durée propre*. Cette quantité est un invariant de l'espace-temps plat de la relativité restreinte mais également, nous le verrons par la suite, de l'espace-temps courbe de la relativité générale.

La durée propre est donc un invariant dans une transformation de Lorentz-Poincaré. L'invariance de la durée propre montre que la marche de deux horloges strictement identiques, placées respectivement dans deux référentiels d'inertie, reste toujours physiquement la même conformément au principe de relativité.

Pour repérer une particule dans l'espace-temps, il faut cependant utiliser, dans un référentiel donné, un *temps-coordonnée*, que nous noterons en général par une lettre latine, t par exemple. Le temps propre ne balise pas tout l'espace ; c'est un paramètre intrinsèque lié à chaque horloge. C'est un « temps personnel » qui ne doit pas être confondu avec le temps-coordonnée.

La durée dt qui figure dans la formule (1.2.3) est la différence entre deux temps-coordonnées $(t + dt)$ et t. Cette quantité dt est appelée *durée impropre* ; c'est une grandeur mesurée entre le temps marqué par deux horloges placées à des endroits différents ; dans le cas présent, ces lieux sont infiniment voisins.

1.3 STRUCTURE DE L'ESPACE-TEMPS PLAT

Suivant les valeurs respectives des quantités spatiales et temporelles, le carré de l'intervalle peut être positif, nul ou négatif.

1.3.1 Intervalle du genre lumière

Lorsque l'intervalle infinitésimal est nul, on a : $c^2dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Les deux événements peuvent être reliés par un rayon lumineux. L'intervalle est dit du *genre lumière*.

Considérons alors le lieu de tous les événements possibles qui peuvent être reliés par un signal lumineux à un événement déterminé O que nous allons prendre pour origine O de l'espace-temps représenté dans un référentiel R. Pour un événement quelconque M, situé au point x, y, z, t et tel que l'intervalle avec O soit nul, on a :

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.3.1}$$

Dans l'espace-temps à quatre dimensions, l'équation (1.3.1) est celle d'un *hypercône* représentant le lieu des trajectoires des rayons lumineux issus de l'origine O. Afin de pouvoir visualiser une telle hypersurface et de mieux étudier ses propriétés, limitons-nous aux événements pour lesquels $z = 0$. On obtient alors l'équation :

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 \tag{1.3.2}$$

C'est l'équation d'une famille continue de cercles, centrés sur l'axe du temps, chaque cercle étant de rayon ct. On obtient l'équation d'un cône appelé *cône de lumière* (Figure 1.2). Tous les événements situés sur le cône de lumière peuvent être reliés à l'événement O par un signal de vitesse c.

Tous les événements situés à l'intérieur du cône peuvent être reliés à O par un signal de vitesse inférieure à c.

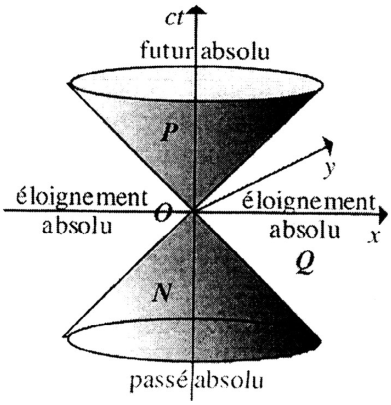

Figure 1.2

1.3.2 Intervalle du genre temps

Lorsque l'intervalle entre deux événements est tel que : $ds^2 > 0$, la partie temporelle de l'intervalle prédomine sur la partie spatiale. L'intervalle ds est alors un nombre réel et il est appelé *intervalle du genre temps*.

Remarquons que deux événements relatifs à une même particule matérielle sont séparés par un intervalle qui est nécessairement du genre temps. En effet, la distance parcourue par la particule entre les deux événements, situés respective-ment aux temps t_0 et t_1, doit rester inférieure à $c(t_1 - t_0)$. Si l_{12} est la distance parcourue, on a toujours $c(t_1 - t_0) > l_{12}$, soit $(s_{12}^2) > 0$.

Tous les intervalles du genre temps entre l'événement O et un événement quelconque sont situés à l'intérieur du cône de lumière. Ceux situés dans la région $t > 0$ sont postérieur à l'événement O ; cette région est appelée région du *futur absolu* (Figure 1.2). Ceux situés dans la région $t < 0$ sont antérieurs à l'événement O ; cette région est appelée région du *passé absolu*.

Dans cette région, l'interaction se propage toujours à une vitesse inférieure à celle de la lumière. Tous les événements situés à l'intérieur du cône de lumière peuvent donc avoir une relation de cause à effet ; il en est de même pour les événements situés sur le cône de lumière.

Deux événements ne peuvent donc être liés par une relation de causalité que si leur intervalle est du genre temps ou du genre lumière. L'existence d'un futur et d'un passé absolus pour ces événements montre que la notion de causalité conserve toujours un sens en relativité restreinte.

1.3.3 Intervalle du genre espace

Lorsque l'intervalle entre deux événements est tel que : $ds^2 < 0$, la partie spatiale de l'intervalle prédomine sur la partie temporelle. L'intervalle est alors un nombre imaginaire pur ; il est appelé *intervalle du genre espace*.

Dans la région extérieure au cône de lumière, tout intervalle entre l'événement O et un événement quelconque est du genre espace. Si l'on change de référentiel, ces événements auront lieu en des points différents de l'espace qui appartiendront toujours à la région extérieure au cône de lumière. Cette région est appelée région d'*éloignement absolu*.

Les notions de « avant », « après », « simultanément » sont relatives pour tous les événements de cette région. Il n'existe donc pas de notion de causalité dans la région d'éloignement absolu. Dans un référentiel où ces événements sont simultanés, ils sont séparés d'une distance spatiale dont le carré est égal au carré de l'intervalle.

1.3.4 L'espace-temps euclidien de Poincaré

Un certain arbitraire peut intervenir dans le choix du signe du carré de l'intervalle entre deux événements ce qui ne change rien à ses propriétés. Choisissons la convention de signe opposée à celle qui figure dans la formule (1.2.2) en posant :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - cdt^2 \qquad (1.3.3)$$

C'est la forme quadratique définie par Poincaré [Po2] dont il a démontré l'invariance. Effectuons à présent le changement de variables utilisé par Poincaré : $w = ict$, avec $i^2 = -1$. L'intervalle (1.3.3) s'écrit alors :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \qquad (1.3.4)$$

On remarque que le second membre de cette dernière relation constitue la généralisation à quatre dimensions du carré de la distance entre deux points dans l'espace de la géométrie euclidienne à trois dimensions. Muni de telles coordonnées, l'espace-temps devient euclidien.

L'intervalle étant un invariant dans une transformation de Lorentz-Poincaré, cela signifie que cette transformation conserve les distances dans l'espace quadridimensionnel de Poincaré. Dans l'espace ordinaire, ce sont les rotations qui conservent les distances par rapport à un point. Dans l'espace à quatre dimensions, la transformation de Lorentz-Poincaré constitue donc une rotation de l'espace-temps.

1.4 MÉTRIQUE DE L'ESPACE-TEMPS PLAT

Les bases géométriques de la relativité restreinte mettent en jeu deux espaces distincts. D'une part un espace ponctuel dont les points sont repérés par quatre coordonnées ; c'est l'espace-temps. Un espace vectoriel associé à l'espace ponctuel.

Afin de rendre plus homogène les formules relativistes définies dans l'espace-temps, on utilise le changement de variables suivant :

$$x_0 = ct\,; \quad x_1 = x\,; \quad x_2 = y\,; \quad x_3 = z \qquad (1.4.1)$$

Pour désigner l'une quelconque de ces quatre coordonnées, on utilisera un indice noté par une lettre grecque, par exemple x_μ. Par la suite, les indices grecs prendront toujours des valeurs de 0 à 3. Par contre, lorsque cela nécessaire, on utilisera des indices latins, $i, j, k,$ par exemple, qui prendront des valeurs de 1 à 3. Ainsi x_j désigne l'une quelconque des coordonnées spatiales.

1.4.1 Quadrivecteurs

Les coordonnées (x_0, x_1, x_2, x_3) d'un point de l'espace-temps peuvent être considérées comme les composantes d'un vecteur $\mathbf{R} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \mathbf{r})$ appelé *rayon-vecteur*. Lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie R à un autre R', les composantes de ce rayon-vecteur se transforment selon les formules (1.1.1) de la transformation de Lorentz-Poincaré.

On appelle *quadrivecteur* **A**, ou encore 4-*vecteur* **A**, un ensemble de quatre quantités (a_0, a_1, a_2, a_3) qui se transforment lors d'un changement de référentiel d'inertie comme les composantes x_μ d'un rayon vecteur. Le rayon-vecteur **R** est par définition un quadrivecteur.

La première composante d'un quadrivecteur est dite composante temporelle et les trois suivantes composantes spatiales.

Lorsque des entités mathématiques se transforment selon les formules de la transformation de Lorentz-Poincaré, ces grandeurs sont dites *covariantes*.

Par définition, les quadrivecteurs sont des vecteurs à quatre dimensions qui sont covariants.

1.4.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs de la géométrie classique est un invariant pour les transformations géométriques de l'espace tridimensionnel. Nous avons vu que l'intervalle de l'espace-temps quadridimensionnel est un invariant ; il représente la pseudo-distance entre deux événements.

Si l'on appelle d**R** un quadrivecteur infinitésimal de l'espace-temps, on peut définir un produit scalaire tel que : $\mathrm{d}\mathbf{R} \cdot \mathrm{d}\mathbf{R} = ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$. On obtient une quantité invariante qui incite à définir de manière générale le produit scalaire de deux quadrivecteurs $\mathbf{A} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ et $\mathbf{B} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ par :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \tag{1.4.2}$$

On peut vérifier aisément que le produit (1.4.2) satisfait aux axiomes de définition d'un produit scalaire.

La norme d'un quadrivecteur **A** est définie par la racine carrée du produit scalaire de **A** par lui-même, soit : $||\mathbf{A}|| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$. Le nombre de signes + et – qui figurent dans l'expression de la norme d'un vecteur constitue une caractéristique de tout espace vectoriel ; elle est appelée *signature* de l'espace vectoriel. L'espace vectoriel ainsi muni d'un tel produit scalaire est un espace *préhilbertien*, encore appelé par les physiciens espace *pseudo-euclidien*.

1.4.3 Espace-temps de Poincaré-Minkowski

Le formalisme quadridimensionnel inauguré par Poincaré fut repris et développé par Minkowski. Ce dernier introduisit la forme (1.4.2) du produit scalaire. Pour cela, il définit une base de l'espace vectoriel formé par les quadrivecteurs en postulant l'existence d'une base « minkowskienne ».

Cette base est constituée par quatre vecteurs $\mathbf{e}_\alpha$ orthonormés tels que leurs produits scalaires entre eux ont pour valeurs :