Chapitre I

Trigonométrie

1. PRELIMINAIRES

1.1. Domaines d'application

De nombreux domaines scientifiques utilisent la trigonométrie depuis des époques très lointaines. Tout d'abord utilisée en astronomie et en navigation (pour les méthodes de triangulation), la trigonométrie est utilisée dans les temps modernes dans de très nombreux domaines (physique, électricité, électronique, mécanique, acoustique, optique, géographie, géodésie, cartographie ….).

C'est donc une science incontournable pour tout technicien ou pour l'ingénierie. La trigonométrie représente un outil essentiel, dans un premier temps, notamment pour des études en génie électrique, génie mécanique et, bien entendu, pour toute étude d'ingénieur.

1.2. Histoire

L'origine de la trigonométrie (du grec *trigonos*, triangle) se situe en Egypte ancienne, en Mésopotamie et dans la vallée de l'Indus, il y a plus de 4000 ans. On relève une première utilisation du *sinus* en Inde entre 800 et 500 av JC. Les premières tables de trigonométrie apparaissent en Grèce entre 190 et 120 av JC. Elles sont émises en 150 ap JC par Ptolémée pour une application à l'astronomie.

La science de la trigonométrie trouve ensuite son essor dans le monde musulman à partir de l'an 1000.

En Europe, la trigonométrie se développe vers le milieu du XIV$^{\text{ème}}$ siècle par la redécouverte des travaux de Ptolémée.

C'est en 1595 que la discipline prend pour nom la *trigonométrie* et à cette époque que la notation *sina* est introduite par le mathématicien flamand Adriaan van Roomen pour exprimer le sinus d'un angle. Cet outil ne cesse ensuite d'être exploité jusqu'aujourd'hui.

2. DEFINITIONS

2.1. Cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé, on définit le cercle trigonométrique comme un cercle de centre O et de rayon 1. On munit l'ensemble d'une orientation.

Par définition, le sens positif est la rotation dite *dans le sens trigonométrique,* sens inverse des aiguilles d'une montre (figure 1).

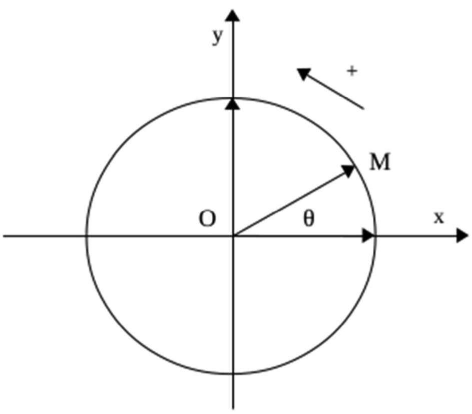


Figure 1. Cercle trigonométrique

L'angle θ, formé par le segment OM et l'axe des abscisses se mesure en degrés, en grades ou en radians. Dans le domaine de la trigonométrie, seuls les radians sont utilisés.

A 360°, soit un tour complet, correspondent 2π radians. On parle aussi de récurrence en affectant à un angle de *k* tours (*k* étant un nombre entier), une mesure de $2k\pi$ radians.

Tout angle θ admet une infinité de mesures par cette récurrence. La mesure fondamentale appartient à l'intervalle]-π,+π] qui parcourt tout le cercle trigonométrique.

L'ensemble des solutions de mesure d'un angle donné s'écrit donc : $\theta + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2.2. Lignes trigonométriques

On appelle :

- *cosinus* θ, l'abscisse du point *M* (figures 1 et 2)
- *sinus* θ, l'ordonnée du point M
- *tangente* θ et l'on note $tan\ \theta$, le quotient $\frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}$

On note ainsi les coordonnées du point M : M (cos θ, sin θ).

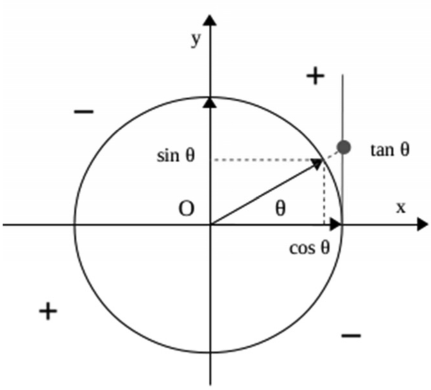
Une définition géométrique des lignes trigonométriques est donnée figure 2, affectant un signe positif à la tangente dans le premier $[0,\frac{\pi}{2}]$ et troisième $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$ cadran et négatif dans le deuxième $[\frac{\pi}{2},\pi]$ et quatrième $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ cadran.

2.3. Propriétés

$\forall\theta,\ -1 \leq \cos\theta \leq 1 \qquad \forall\theta,\ -1 \leq \sin\theta \leq 1$
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (d'après Pythagore)

2.4. Valeurs remarquables

Le tableau 1 récapitule les valeurs des lignes trigonométriques pour certains angles remarquables.



Angle (rd)	0	π/6	π/4	π/3	π/2
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Figure 2. Définitions géométriques *Tableau 1. Valeurs remarquables*

Exercice 1

3. PROPRIETES REMARQUABLES

3.1. Relations obtenues par lecture sur le cercle trigonométrique

$$cos(x+2\pi) = cos\ x \qquad sin(x+2\pi) = sin\ x \qquad tan(x+2\pi) = tan\ x$$

$$cos(\pi - x) = -cos\ x \qquad sin(\pi - x) = sin\ x \qquad tan(\pi - x) = -tan\ x$$

$$cos(\pi + x) = -cos\ x \qquad sin(\pi + x) = -sin\ x \qquad tan(\pi + x) = tan\ x$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\ x \qquad cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sin\ x$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\ x \qquad sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos\ x$$

$$tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{tanx} \qquad tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{tanx}$$

3.2. Relations relatives à l'addition d'angles

$cos(a+b) = cos\ a.cos\ b - sin\ a.sin\ b$	$cos(a-b) = cos\ a.cos\ b + sin\ a.sin\ b$
$sin(a+b) = sin\ a.cos\ b + cos\ a.sin\ b$	$sin(a-b) = sin\ a.cos\ b - cos\ a.sin\ b$
$tan(a+b) = \frac{tan\ a + tan\ b}{1 - tan\ a.tan\ b}$	$tan(a-b) = \frac{tan\ a - tan\ b}{1 + tan\ a.tan\ b}$

3.3. Relatives au produit de sinus et cosinus

$$sin\ a.sin\ b = \frac{1}{2}[cos(a-b) - cos(a+b)]$$

$$sin\ a.cos\ b = \frac{1}{2}[sin(a-b) + sin(a+b)]$$

$$cos\ a.cos\ b = \frac{1}{2}[cos(a-b) + cos(a+b)]$$

3.4. Relatives à la somme de sinus et cosinus

$sin\ p + sin\ q = 2\ sin\frac{p+q}{2}.cos\frac{p-q}{2}$	$sin\ p - sin\ q = 2\ sin\frac{p-q}{2}.cos\frac{p+q}{2}$
$cos\ p + cos\ q = 2\ cos\frac{p+q}{2}.cos\frac{p-q}{2}$	$cos\ p - cos\ q = -2\ sin\frac{p+q}{2}.sin\frac{p-q}{2}$

Exercices 2 à 4

3.5. Linéarisation

La linéarisation consiste à exprimer des fonctions trigonométriques élevées à une puissance donnée selon des fonctions trigonométriques de degré un. On démontre les égalités suivantes (voir Chapitre II):

$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$	$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$
$cos^3x = \frac{3}{4}cosx + \frac{1}{4}cos3x$	$sin^3x = \frac{3}{4}sinx - \frac{1}{4}sin3x$

4. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Il s'agit dans ce paragraphe de représenter les fonctions trigonométriques pour une utilisation ultérieure à l'électricité et toutes les composantes du domaine de la physique qui en découlent. Dans l'objectif de ces applications, la variable choisie est maintenant le temps « *t* ». Ces fonctions seront par ailleurs abordées au cours du chapitre III en tant qu'outils servant éventuellement à l'élaboration de fonctions plus complexes.

Pour cette première présentation, on utilise ici la variable *t* représentant le temps, plus usitée dans le domaine technique et ses applications.

4.1. Fonction sinus (*sin t*)

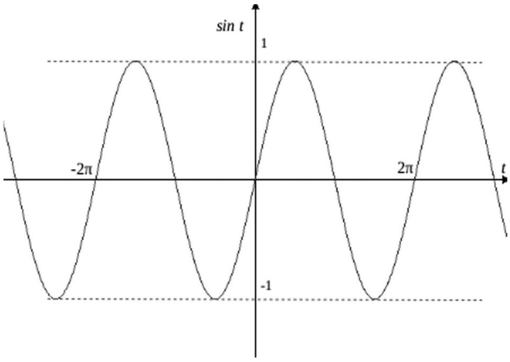


Figure 3. *Fonction sin(t)*

La figure 3 représente la fonction sinus. C'est une fonction périodique de période 2π et de valeurs comprises entre -1 et +1 prenant la valeur *0* en $t = 0$.

A chaque passage par l'ordonnée 0 (intersection avec l'axe des abscisses), la courbe change de concavité : ce sont les points d'inflexion.

4.2. Fonction cosinus (*cos t*)

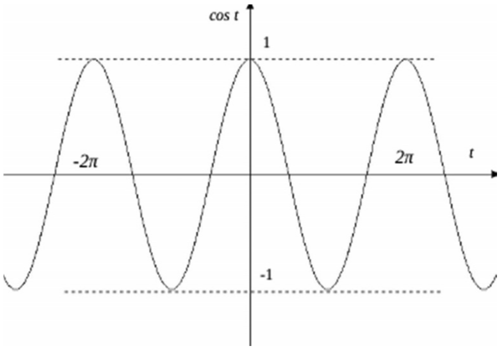


Figure 4. *Fonction cos(t)*

La figure 4 représente la fonction cosinus. C'est est une fonction périodique de période 2π et de valeurs comprises entre -1 et +1 qui prend la valeur *1* en $t = 0$.

A chaque passage par l'ordonnée 0 (intersection avec l'axe des abscisses), la courbe change de concavité : ce sont les points d'inflexion.

4.3. Fonction tangente (tan *t*)

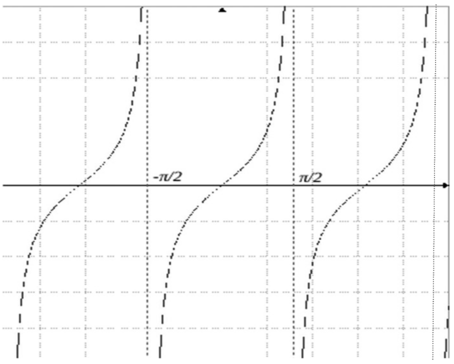


Figure 5. *Fonction tan(t)*

La figure 5 représente la fonction tangente. C'est une fonction périodique de période π et de valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$ qui prend la valeur 0 en t = 0.

Comme précédemment, les points d'inflexion se situent sur l'axe des abscisses.

Les chapitres suivants verront plus précisément comment les déterminer.

5. EQUATIONS ET TRANSFORMATIONS

5.1. Résolution d'équations trigonométriques

Il s'agit de trouver les solutions de certaines égalités :

$cos\ a = \cos b$	donne les solutions	$a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
$\sin a = \sin b$	donne les solutions	$a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Dans les autres cas, il s'agit de se ramener à l'une de ces deux formes en utilisant les formules classiques présentées plus haut.

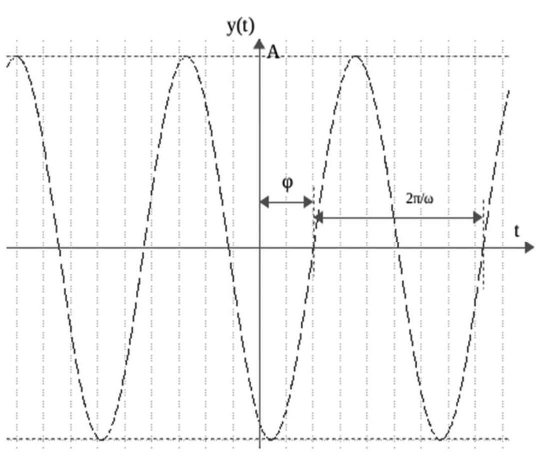
5.2. Transformations

La trigonométrie va largement contribuer à la modélisation et la représentation de signaux, notamment en application à l'électricité, l'électronique et la mécanique. Il s'agit d'étudier les signaux de forme générale :

$$y(t) = A\,.\cos(\omega t \pm \varphi)$$

$$y(t) = A.\sin(\omega t \pm \varphi)$$

Dans ces expressions apparaissent l'amplitude, la pulsation et le déphasage du signal par rapport à l'origine O.



L'abscisse est le temps « *t* » (exprimé en secondes).

- ω est la pulsation du signal (en radians par seconde).
- φ est son déphasage (en radians).
- A est son amplitude (réel positif).

La figure 6 représente la fonction $y(t) = A\sin(\omega t - \varphi)$, de période $2\pi/\omega$

Figure 6. ***fonction y(t) = A.sin(ωt - φ)***

5.2.1. Transformation en somme de termes non déphasés

Il est toujours possible de décomposer ce type de fonction en une somme de sinus et cosinus non déphasés. Autrement dit établir la relation :

$$A.cos(\omega t - \varphi) = \mathrm{A}[\alpha.cos\ \omega t + \beta.sin\ \omega t]$$

- en exprimant les facteurs α et β par l'utilisation de l'expression :

$cos(a - b) = cos\ a.cos\ b + sin\ a.sin\ b$

- en identifiant avec

$cos(\omega t - \varphi) = cos\ \omega t.cos\ \varphi + sin\ \omega t.sin\ \varphi$, on obtient :

$\alpha = cos\ \varphi$ et $\beta = sin\ \varphi$

5.2.2. Transformation inverse,

- partant de $a.cos\ \omega t + b.sin\ \omega t$
- en posant $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et le mettant en facteur :

$$a.cos\ \omega t + b.sin\ \omega t = A\left(\frac{a}{A}.cos\ \omega t + \frac{b}{A}.sin\ \omega t\right)$$

- en cherchant l'angle φ tel que :
  $cos\ \varphi = \frac{a}{A}$
  $\sin \varphi = \frac{b}{A}$

Il vient :

$$a.cos\ \omega t + b.sin\ \omega t = A(cos\ \varphi.cos\ \omega t + sin\ \varphi.sin\ \omega t) = A.cos(\omega t - \varphi)$$

Exercices 5 à 10

6. RESUME DE COURS

Par définition, le sens positif est la rotation dite *dans le sens trigonométrique,* sens inverse des aiguilles d'une montre.

L'angle θ, formé par le segment OM et l'axe des abscisses se mesure en degrés, en grades ou en radians. Dans le domaine de la trigonométrie, seuls les radians sont utilisés.

A 360° correspondent 2π radians.

Tout angle θ admet une infinité de mesures. La mesure fondamentale appartient à l'intervalle

] -π, +π] . L'ensemble des solutions de mesure d'un angle donné s'écrit $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés essentielles

$$cos(a+b) = cosa.cosb - sina.sinb$$

$$cos(a-b) = cosa.cosb + sina.sinb$$

$$sin(a+b) = sina.cosb + cosa.sinb$$

$$sin(a-b) = sina.cosb - cosa.sinb$$

$$sinp + sinq = 2sin\frac{p+q}{2}.cos\frac{p-q}{2}$$

$$sinp - sinq = 2sin\frac{p-q}{2}.cos\frac{p+q}{2}$$

$$cosp + cosq = 2cos\frac{p+q}{2}.cos\frac{p-q}{2}$$

$$cosp - cosq = -2sin\frac{p+q}{2}.sin\frac{p-q}{2}$$

$$cos^2x = \frac{1}{2}(1+cos2x) \quad sin^2x = \frac{1}{2}(1-cos2x)$$

$$cosa = cos\mathrm{b} \;\rightarrow\; a = b + 2k\pi \;\text{ ou }\; a = -b + 2k\pi$$

$$sina = sin\mathrm{b} \;\rightarrow\; a = b + 2k\pi \;\text{ ou }\; a = \pi - b + 2k\pi$$

Toute forme $Acos(\omega t - \varphi)$ peut se décomposer en une somme de sinus et cosinus sans déphasage.