Comme g laisse $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)$ stable, alors $g(u)$ et $g(v)$ sont combinaisons linéaires de u et v, ce qui prouve que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G=\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Puisque $g^2=f$, on a $G^2=T$, ce qui donne, sans faire les calculs donnant la dernière colonne de G^2 : $\begin{pmatrix} a^2+ba' & a'(a+b') & x' \\ b(a+b') & b'^2+ba' & y' \\ 0 & 0 & z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Par identification des coefficients, on obtient entre autres :

$$a^2+ba'=0,\ a'(a+b')=1,\ b(a+b')=0 \text{ et } b'^2+ba'=0$$

La deuxième équation prouve que, ni a' ni $a+b'$ n'est nul. En reportant cette information dans la troisième équation, on obtient : $b=0$. On en déduit avec les deux autres équations : $a=0$ et $b'=0$, ce qui contredit $a'(a+b')=1$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant : } g^2=f}$$

4) a) Procédons par analyse-synthèse.

- Analyse. Considérons x élément de $\mathbb{R}^n$ et supposons que l'on ait : $x=y+z$, avec y élément de $\operatorname{Ker}\left(h^{n-1}\right)$ et z élément de $\operatorname{Ker}(h-\alpha\, Id)$.

En appliquant h^{n-1} (linéaire) à l'égalité $x=y+z$, on obtient :

$$h^{n-1}(x)=h^{n-1}(y)+h^{n-1}(z)$$

Comme y appartient à $\operatorname{Ker}\left(h^{n-1}\right)$, il reste : $h^{n-1}(x)=h^{n-1}(z)$.

Comme z appartient à $\operatorname{Ker}(h-\alpha\, Id)$, on a $h(z)=\alpha z$ et on en déduit que :

$$h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z$$

On a donc : $h^{n-1}(x)=\alpha^{n-1}z$.

Le réel α n'est pas nul donc $z=\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$ et il en résulte :

$$y=x-\frac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$$

Remarque. Pour obtenir $h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z$, il semble peu utile de montrer par récurrence que : $\forall p\in\mathbb{N}$, $h^p(z)=\alpha^p z$. Voici tout de même la preuve :