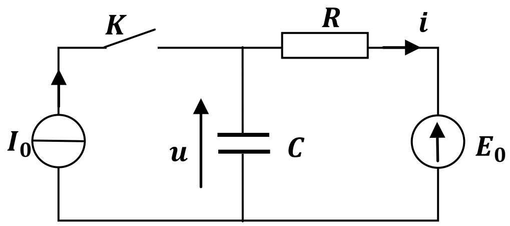
Jour n°1

Exercice 1.1



Soit le circuit ci-dessus, faisant intervenir deux générateurs. L'interrupteur K est ouvert depuis longtemps ($t < 0$) et il est fermé à l'instant $t = 0$ choisi comme origine des temps.

1) Calculer en les justifiant soigneusement : $u(t = 0^+)$; $i(t = 0^+)$.

2) Calculer u et i, lorsque le régime permanent est établi.

3) Calculer $u(t)$ et $i(t)$ pour tout $t > 0$. Commenter.

4) On remplace le générateur de tension continue par un générateur de tension de force électromotrice $e = E_0 cos(\omega t)$ et le générateur de courant par un générateur de courant de courant électromoteur $i = I_0 \sin(\omega t)$. Calculer $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

Exercice 1.2

Un interféromètre de Michelson donne la figure fournie en annexe sur un écran à l'aide d'une lentille convergente de 1 m de distance focale.

1) Faire un schéma explicite du dispositif. Dans quelle configuration sont les miroirs de l'interféromètre de Michelson ? Pourquoi faut-il que la source lumineuse soit étendue ? Où se trouve la lentille d'observation ? À quoi sert-elle ?

2) Donner la différence de marche.

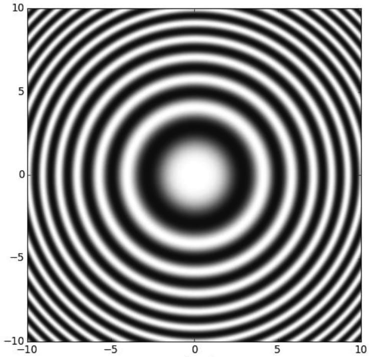
3) Sachant que la longueur d'onde de la source est de 530 nm, déterminer la distance e entre les deux miroirs.

4) On éclaire maintenant avec deux raies de même intensité et de longueur d'onde $\lambda_1 = 541\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_2 = 577\,\mathrm{nm}$. Donner les expressions des ordres d'interférences p_1 et p_2 . Expliquer pourquoi il est possible d'observer un brouillage. À quelles conditions obtient-on un brouillage ?

5) Soit e la distance entre les 2 miroirs pour un brouillage total. Donner la différence d'épaisseur $\Delta(e)$ entre la première et la deuxième positions des miroirs entre deux brouillages successifs. On voit défiler, au centre de la figure d'interférences, N anneaux entre deux anti-coïncidences successives. Calculer N. En déduire Δe. Si l'erreur sur N est de un anneau, quelle est l'incertitude sur la mesure de Δe ?

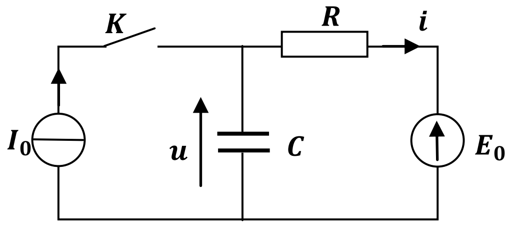
x (cm)

annexe



y (cm)

Énoncé



Soit le circuit ci-dessus, faisant intervenir deux générateurs. L'interrupteur K est ouvert depuis longtemps ($t < 0$) et il est fermé à l'instant $t = 0$ choisi comme origine des temps.

1) Calculer en les justifiant soigneusement : $u(t = 0^+)$; $i(t = 0^+)$.

2) Calculer u et i, lorsque le régime permanent est établi.

3) Calculer $u(t)$ et $i(t)$ pour tout $t > 0$. Commenter.

4) On remplace le générateur de tension continue par un générateur de tension de force électromotrice $e = E_0 cos(\omega t)$ et le générateur de courant par un générateur de courant de courant électromoteur $i = I_0 \sin(\omega t)$. Calculer $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice porte sur le programme d'électrocinétique de première année.

1) Cette question est souvent mal explicitée par les étudiants. Sa résolution nécessite de bien connaître les relations de continuité des différentes grandeurs électriques.

↪ Charge d'un condensateur et courant traversant une bobine sont les seules grandeurs électriques toujours continues.

2) La forme du régime permanent dépend de la nature des générateurs et de la présence d'éléments résistifs dissipateurs d'énergie.

↪ En présence d'éléments résistifs, le régime permanent est imposé par la nature des générateurs.

3) Loi des nœuds, loi des mailles permettent d'écrire puis de résoudre les équations différentielles vérifiées par $u(t)$ et $i(t)$.

↪ Pensez à utiliser la question **1)** dans la détermination des constantes d'intégration et à vérifier les résultats établis en **2**) lorsque l'on fait tendre t vers l'infini. C'est toujours réconfortant de sentir qu'on est sur la bonne voie !

4) On passe dans cette question au régime sinusoïdal forcé. Il faut penser à utiliser la notation complexe associée à toute grandeur sinusoïdale et travailler avec les impédances complexes. Il faut ensuite écrire une loi des mailles et une loi des nœuds.

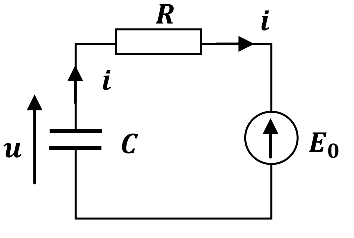
↪ Dans cette question ne vous laissez pas déstabiliser par l'écriture en $sin(\omega t)$ du générateur de courant, il suffit de le transformer en $cos(\omega t - \pi/2)$.

Corrigé

1) À $t = 0^-$, l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps, le condensateur a eu le temps de se charger complètement. Un premier régime permanent constant imposé par le générateur E_0 est atteint, la charge $q(0^-)$ est alors constante, notons q_0 cette constante. Or i et q sont reliés par la relation suivante :

$$i(t) = -\frac{dq}{dt}.$$

Attention au signe négatif qui est dû ici au choix d'une convention générateur.



D'où :

$$i(0^-) = -\frac{dq_0}{dt} = 0.$$

Loi des mailles :

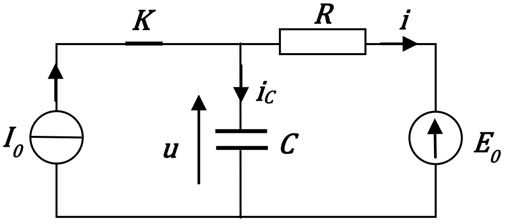
$$u(t) = Ri + E_0.$$

Conditions initiales :

$$u(0^-) = Ri(0^-) + E_0 = E_0$$
$$q(0^-) = Cu(0^-) = CE_0.$$

À $t = 0^+$, l'interrupteur K est fermé or la charge du condensateur ainsi que la tension à ses bornes sont deux grandeurs continues donc :

$$q(0^-) = q(0^+) = CE_0$$
$$u(0^+) = \frac{q(0^+)}{C} = E_0.$$



La loi des mailles impose alors :

$$u(0^+) = Ri(0^+) + E_0 \quad or \quad u(0^+) = E_0.$$

D'où finalement :

$$i(0^+) = 0 = i(0^-).$$

Le courant qui traverse la résistance est continu mais c'est tout à fait fortuit !

La loi des nœuds impose :

$$I_0 = i_C(0^-) + i(0^-) = i_C(0^+).$$

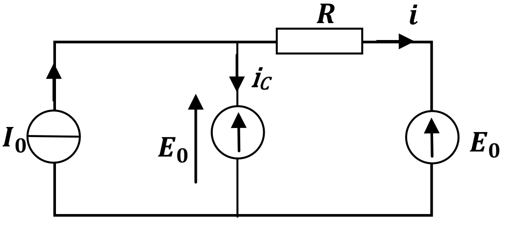
Le courant I_0 traverse en totalité le condensateur, d'où la relation suivante :

$$\boxed{I_0 = i_C(0^+) = \left.\frac{dq}{dt}\right]_{0^+} = C\left.\frac{du}{dt}\right]_{0^+}.}$$

- ***Remarques :*** *ces différentes relations, valables uniquement à l'instant $t = 0^+$ qui suit la fermeture du circuit, nous serviront de conditions initiales à la question **3)**.*

- *Il est aussi possible de travailler avec le schéma équivalent du condensateur à $t = 0^+$.*

Schéma équivalent à $t = 0^+$



- *Il est immédiat que le courant $i(0^+) = 0$ et que $i_C(0^+) = I_0$.*

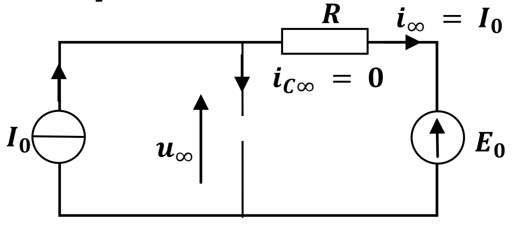
2) Le régime permanent, théoriquement obtenu au bout d'un temps t infini, sera de même nature que les générateurs d'attaque, c'est à dire ici constant. Les grandeurs électriques seront donc toutes constantes et parmi ces grandeurs, celles qui s'expriment par une dérivée temporelle comme le courant traversant un condensateur ou la tension aux bornes d'une bobine d'inductance pure, seront donc nulles :

$$i_C(\infty) = \frac{dq_\infty}{dt} = 0$$

$$u_L(\infty) = L\frac{di_\infty}{dt} = 0.$$

Le condensateur peut alors être remplacé par un interrupteur ouvert ($i_C = 0, \forall$ la charge).

Schéma équivalent à t_∞



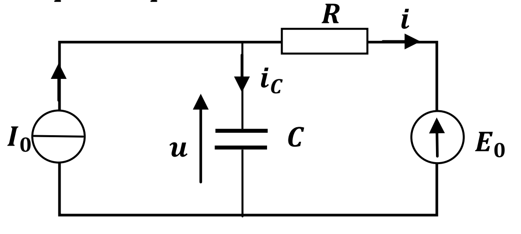
Loi des mailles et loi des nœuds aboutissent aux relations suivantes :

$$\boxed{i_\infty = I_0}$$

$$\boxed{u_\infty = E_0 + RI_0.}$$

3) Étude du régime transitoire :

à t = quelconque



Loi des nœuds, loi des mailles et relation tension intensité donnent les équations :

$$I_0 = i + i_C \qquad (1)$$

$$u = Ri + E_0 \qquad (2)$$

$$i_C = C\frac{du}{dt} \qquad (3)$$

En combinant ces trois équations de base, il vient :

$$I_0 = i + C\frac{d(Ri + E_0)}{dt} = i + RC\frac{di}{dt} \qquad (4)$$

On reconnait en (4) une équation différentielle portant sur la variable i à coefficients constants du premier ordre avec second membre constant. Sa résolution ne pose pas de problèmes et la solution est :

$$i(t) = I_0 + Aexp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (4')$$

En réinjectant dans (2) il vient :

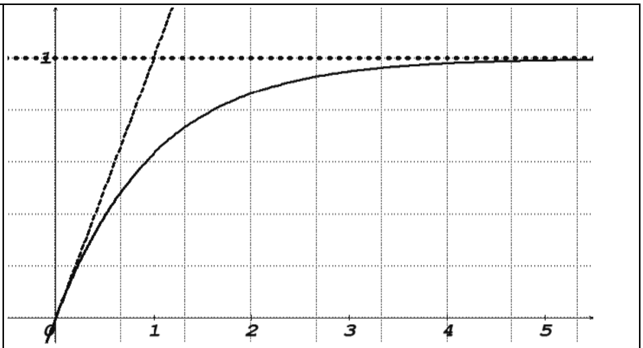
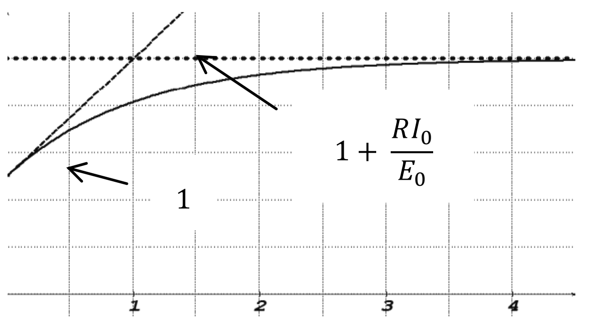
$$1 + \frac{RI_0}{E_0}$$

$$u(t) = R\left(I_0 + Aexp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

La détermination de la constante A se fait à partir des conditions initiales établies en **1)** :

$$i(0^+) = 0 \ et \ u(0^+) = E_0 \quad d'où \quad A = -I_0.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} i(t) = I_0\left(1 - exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) & (4') \\ u(t) = R\,I_0\left(1 - exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) + E_0 & (5'). \end{array}}$$

$\frac{i(t)}{I_0} = f(\frac{t}{RC})$	
$\frac{u(t)}{E_0} = g(\frac{t}{RC})$	

Remarque 1 : *on vérifie le bien fondé des résultats établis en* ***2)*** *à savoir :*

$$i_\infty = I_0 \ et \ u_\infty = E_0 + RI_0.$$

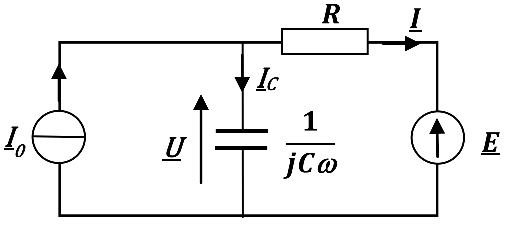
Remarque 2 : *le produit RC est homogène à un temps, sa durée* *est caractéristique du temps d'établissement du régime permanent. On le note généralement τ et on considère que lorsque $t > 5\tau$, le régime permanent est atteint. Pour des valeurs classiques de $R(k\Omega)$ et $C(\mu F)$, $\tau \sim ms$, ce qui explique qu'en pratique il est difficile de l'observer, et que c'est le régime permanent qui apparaît.*

Remarque 3 : *il est bon à ce niveau de l'exercice de faire preuve d'autonomie et de penser à représenter les courbes $i(t)$ et $u(t)$ en les interprétant habilement !*

4) Les deux générateurs d'attaque oscillant à la même fréquence, il est possible de traiter le problème en les conservant tous les deux dans le circuit.

Dans le cas contraire, il faudrait les étudier séparément et faire appel au théorème de superposition.

La résistance R dans le circuit assure la disparition du régime transitoire pourvu que l'on attende suffisamment longtemps (en pratique : $t > 5\,\tau$).
On utilise alors la notation complexe.



Le courant délivré par le générateur de courant est :

$$\underline{I_0} = I_0\, exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) = -jI_0.$$

La tension aux bornes du générateur de tension est :

$$\underline{E} = E_0.$$

L'impédance du condensateur est :

$$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}.$$

La loi des nœuds donne :

$$\underline{I_0} = \underline{I} + \underline{I_C}$$

La loi des mailles donne :

$$R\underline{I} + \underline{E} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I_C}.$$

Nous trouvons, à partir de la loi des nœuds :

$$\underline{I_C} = \underline{I_0} - \underline{I}.$$