Chapitre

Généralités sur les fonctions

1

L'essentiel à connaître

Rappels de cours

Soit f une fonction définie sur un intervalle **I**.

Fonction croissante, décroissante

f est croissante sur **I**, si pour tous éléments x et y de **I** :

$$x < y \Rightarrow f(x) \le f(y).$$

f est strictement croissante sur **I**, si pour tous éléments x et y de **I** :

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

f est décroissante sur **I** si pour tous éléments x et y de **I** :

$$x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y).$$

f est strictement décroissante sur **I** si pour tous x et y de **I** :

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Maximum, minimum, extremum

f admet un maximum (absolu) en $a \in \mathbf{I}$, si pour tout x de **I** :

$$f(x) \le f(a).$$

f admet un minimum (absolu) en $a \in \mathbf{I}$, si pour tout x de **I** :

$$f(x) \ge f(a).$$

f admet un maximum relatif en $a \in I$, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$, tel que $a \in J$ et tel que pour tout x de J : $f(x) \leq f(a)$.

f admet un minimum relatif en $a \in I$, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$, tel que $a \in J$ et tel que pour tout x de J : $f(x) \geq f(a)$.

f admet un extremum sur I si f a un maximum ou un minimum sur I.

Soit f définie sur $I = [\, b\,;c]$ et soit $a \in]\, b\,;c\,[$; si f est croissante sur [b ; a] et décroissante sur [a ; c], f (a) est un maximum de f sur I.

Fonction majorée, minorée, bornée

f est majorée sur I s'il existe M tel que pour tout x de I :

$$f(x) \leq M.$$

M est un majorant de f sur I.

f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que pour tout x de I :

$$f(x) \geq m.$$

m est un minorant de f sur I.

f est bornée sur I si elle est majorée et minorée sur I.

Fonction paire, impaire, périodique

La fonction f , d'ensemble de définition D_f , est paire si :

- $(x \in D_f) \Rightarrow (-x \in D_f)$ et
- pour tout x de D_f , $f(-x) = f(x)$.

La fonction f , d'ensemble de définition D_f , est impaire si :

- $(x \in D_f) \Rightarrow (-x \in D_f)$ et
- pour tout x de D_f , $f(-x) = -f(x)$.

La fonction f , d'ensemble de définition D_f , est périodique de période T si :

- $(x \in D_f) \Rightarrow (x + T \in D_f)$ et
- pour tout x de D_f , $f(x+T) = f(x)$.

Fonctions ku , u + v, uv, $\frac{u}{v}$

Soit u une fonction définie sur l'intervalle I et soit k une constante.
La fonction ku est la fonction définie sur I par : $(ku)(x) = ku(x)$.

Soit u et v deux fonctions définies sur l'intervalle I ;
La fonction u + v est définie sur I par : $(u+v)(x) = u(x)+v(x)$.
La fonction uv est définie sur I par : $(uv)(x) = u(x)\times v(x)$.
La fonction $\frac{u}{v}$ est définie par : $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, pour tout x de I qui n'annule pas le dénominateur.

Si u est croissante sur I et si k > 0, alors ku est croissante sur I.
Si u est croissante sur I et si k < 0, alors ku est décroissante sur I.

Si u et v sont croissantes sur I, alors u + v est croissante sur I.
Si u et v sont décroissantes sur I, alors u + v est décroissante sur I.

Si u et v sont croissantes sur I et si pour tout x de I, $u(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$, alors uv est croissante sur I.

Fonction composée

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I et soit g définie sur un intervalle J contenant toutes les images des éléments de I par f.
La fonction $g_o f$ est définie sur I par :

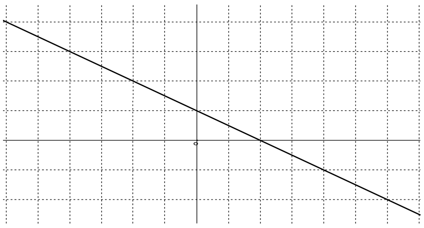
$$(g_o f)(x) = g[f(x)] .$$

f et g vérifiant les conditions de la définition précédente :
Si f et g sont croissantes, $g_o f$ est croissante.
Si f et g sont décroissantes, $g_o f$ est croissante.
Si l'une est croissante, l'autre décroissante, $g_o f$ est décroissante.

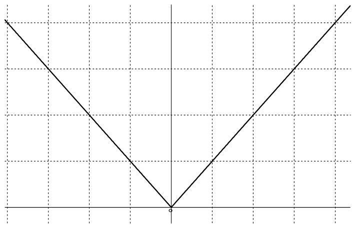
L'essentiel à connaître

Fonctions de base

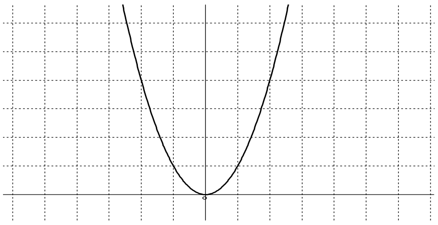
Les fonctions à connaître :



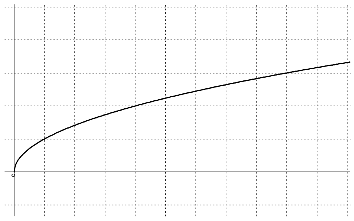
$f(x) = -0{,}5x + 1$



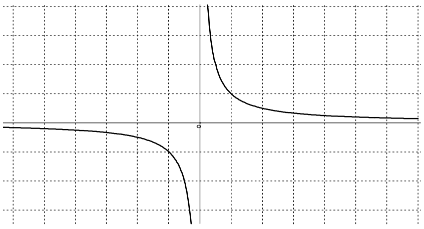
$f(x) = |x|$



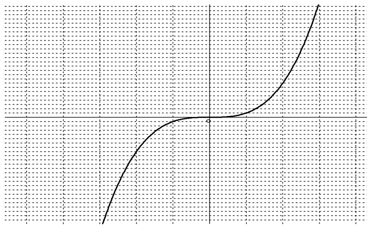
$f(x) = x^2$



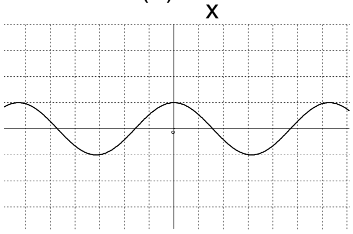
$f(x) = \sqrt{x}$



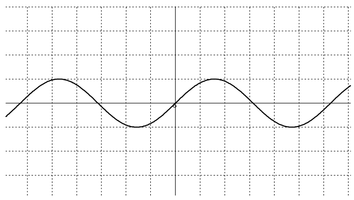
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f(x) = x^3$



$f(x) = \cos x$



$f(x) = \sin x$

Pour tout x réel : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

$\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

Propriétés des inégalités

Si a < b et c < d, alors a + c < b + d : on peut additionner membre à membre deux inégalités de même sens.

Si a < b alors pour tout réel c, a + c < b + c : on peut additionner un même nombre aux deux membres d'une inégalité.

Si a < b et si c > 0, alors ac < bc : on peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un réel strictement positif, sans changer le sens de l'inégalité.

Si a < b et si c < 0, alors ac > bc : on peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un réel strictement négatif, à condition de changer le sens de l'inégalité.

Si $0 \leq a < b$, alors $0 \leq a^2 < b^2$: la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Si $a < b \leq 0$, alors $0 \leq b^2 < a^2$: la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Si $0 < a < b$, alors $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$: la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Si $a < b < 0$, alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$: la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Si $0 < x < 1$, alors $... < x^4 < x^3 < x^2 < x$.

Si $x > 1$, $x < x^2 < x^3 < x^4 < ...$

La fonction partie entière E(x)

Tout réel x est compris entre deux entiers consécutifs : $n \leq x < n+1$. Le nombre n est la partie entière de x et est noté E(x)

$E(x+1) = E(x)+1$ et pour tout entier p, $E(x+p) = E(x)+p$

1. Déterminer D_f : a-t-on f = g ?

Méthode

Etant donnée une expression $f(x)$ de f, déterminer le sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ le plus grand possible sur lequel f est définie.
Penser aux deux conditions :
- un dénominateur ne peut être nul.
- $\sqrt{u(x)}$ n'est défini que si u(x) est défini et si $u(x) \geq 0$.

Deux fonctions f et g sont égales si :
- $D_f = D_g$
- Pour tout x de D_f, $f(x) = g(x)$.

Exemple

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f, g et h :

telles que $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)(-2x+6)}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{-3x+6}}{x-1}$, $h(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{5x-15}}$.

2. Les fonctions f et g sont-elles égales ?

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$. **b.** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$; $g(x) = \sqrt{x}$.

Solution

1. f est définie pour tout réel $x \neq 1$ et $x \neq 3$: $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,3\}.}$

g est définie si $x \neq 1$ et si $-3x + 6 \geq 0$, soit $x \leq 2$. $\boxed{D_g =]-\infty\,;2] \setminus \{1\}.}$

h est définie si $5x - 15 > 0$, soit x > 3. $\boxed{D_h =]\,3\,;+\infty[.}$

2. a. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; d'autre part, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$: $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$. $\boxed{\text{f et g sont égales.}}$

b. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et g est définie sur $\mathbb{R}_+$; on a donc $\boxed{f \neq g.}$
Cependant la restriction de g à $\mathbb{R}_+^*$ est égale à f.

Attention
Une seule valeur de x telle que $f(x) \neq g(x)$ et déjà $f \neq g$!

2. Montrer que f est croissante

Méthode 2.1.

Utiliser les propriétés des inégalités pour prouver que :

$$x < y \text{ implique } f(x) \leq f(y)$$

Exemple

1. Montrer que la fonction f telle que $f(x) = -4x + 3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. f est définie sur $I =]1;+\infty[$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{2}{x-1}$.

Montrer que f est strictement croissante sur I.

3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x+3)^2 + 4$; montrer que f est décroissante sur $[-3\,;+\infty[$

Solution

1. Si x < y, on a $-4x > -4y$, donc $-4x + 3 > -4y + 3$, soit $f(x) > f(y)$. $\boxed{\text{f est bien strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$

2. Si $1 < x < y$, on a : $0 < x-1 < y-1$ et comme la fonction $X \mapsto \dfrac{1}{X}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{y-1} < \dfrac{1}{x-1}$,

donc $-\dfrac{2}{y-1} > -\dfrac{2}{x-1}$, donc $3 - \dfrac{2}{y-1} > 3 - \dfrac{2}{x-1}$ et on a bien : $x < y$ implique $f(x) < f(y)$; $\boxed{\text{f est strictement croissante sur }]1;+\infty[.}$

3. Si $-3 \leq x < y$, on a $0 \leq x+3 < y+3$; comme $X \mapsto -X^2$ décroît sur $\mathbb{R}_+$, $-(x+3)^2 \geq -(y+3)^2$, donc $-(x+3)^2 + 4 \geq -(y+3)^2 + 4$ et on a bien l'implication $\boxed{x < y \text{ implique } f(x) \geq f(y).}$

Attention

Méthode utile pour revoir les inégalités, mais elle a le même intérêt pour l'étude d'une fonction, qu'une trottinette pour faire le tour de France. On disposera bientôt d'un outil universel : les dérivées !

Méthode 2.2.

Etudier le signe de $f(x)-f(y)$ en fonction de celui de $x-y$.

Exemple

1. Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=x^2-2x+3$.

2. Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-1}$.

3. Montrer que la fonction f définie sur par $f(x)=x^3-3x$ est croissante sur $[1;+\infty[$: on utilisera : $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

Solution

1. $f(x)-f(y)=(x^2-2x+3)-(y^2-2y+3)=x^2-y^2-2(x-y)$, soit $f(x)-f(y)=(x-y)(x+y)-2(x-y)=(x-y)[x+y-2]$.
Comme $x\geq 1$ et $y\geq 1$, $x+y-2\geq 0$.
Si x < y, $x-y<0$, donc $f(x)-f(y)\leq 0$, donc $f(x)\leq f(y)$.

$\boxed{\text{f est croissante sur } [1;+\infty[.}$

2. $f(x)-f(y)=\dfrac{2x-4}{x-1}-\dfrac{2y-4}{y-1}=\dfrac{2(x-y)}{(x-1)(y-1)}$;
comme $x>1$ et $y>1$, on a $(x-1)(y-1)>0$.
Si x < y, $2(x-y)<0$, donc $f(x)-f(y)<0$, donc $f(x)<f(y)$.

$\boxed{\text{f est strictement croissante sur } [1;+\infty[.}$

3. $d=f(x)-f(y)=(x^3-3x)-(y^3-3y)=x^3-y^3-3(x-y)$, soit $d=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3(x-y)=(x-y)(x^2+xy+y^2-3)$.
Comme $x\geq 1$ et $y\geq 1$, $x^2+xy+y^2\geq 3$, donc $x^2+xy+y^2-3\geq 0$.

$\boxed{\text{Si } x<y \text{, on a donc } f(x)-f(y)\leq 0 \text{, donc } f(x)\leq f(y).}$

Attention
Méthode utile pour retravailler le calcul ; cette fois l'intérêt est comparable à celui d'une trottinette avec frein, pédale et sonnette.

Méthode 2.3.

Utiliser les théorèmes sur le sens de variation d'une somme ou d'un produit.

Exemple

1. Etudier le sens de variation sur $[0;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=2x+3+x^2$.

2. Etudier le sens de variation sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}$.

3. Montrer que la fonction f définie par $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$ est croissante sur $[1;+\infty[$.

4. Déterminer un intervalle sur lequel on peut sans calcul donner le sens de variation de la fonction f telle que $f(x)=(x-4)x^3$.

Solution

1. La fonction affine $x \mapsto 2x+3$ est croissante sur $[0;+\infty[$, ainsi que la fonction $x \mapsto x^2$. $\boxed{\text{Leur somme f est croissante sur } [0;+\infty[.}$
Remarquons qu'on ne peut rien dire sur $]-\infty;0]$.

2. La fonction $x \mapsto 3x^2$ est croissante sur $I=[0;+\infty[$, car 3 > 0.
$x \mapsto -\frac{1}{x}$ est croissante sur I, car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur I.
$\boxed{\text{Leur somme f est donc croissante sur I.}}$

3. $x \mapsto x-1$ est croissante et positive sur $[1;+\infty[$, ainsi que $x \mapsto \sqrt{x}$. $\boxed{\text{Leur produit f est donc croissant sur } [1;+\infty[.}$
On ne peut rien dire sur $[0;1]$.

4. $x \mapsto x-4$ est croissante et positive sur $[4;+\infty[$, ainsi que $x \mapsto x^3$. $\boxed{\text{Leur produit f est donc croissant sur } [4;+\infty[.}$

Attention
Méthode à utiliser rarement, pour épater les copains et le prof.

Méthode 2.4.

Utiliser le théorème sur le sens de variation d'une composée.

Exemple

1. Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

2. Etudier le sens de variation sur $I=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction f définie par $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Solution

1. Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction $x\mapsto x^2+1$ est croissante (à vérifier) et ses images sont toutes des éléments de $[1\,;+\infty[$.
Sur $[1\,;+\infty[$, la fonction $X\mapsto\sqrt{X}$ est croissante.

Leur composée, f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Sur $]-\infty\,;0]$, la fonction $x\mapsto x^2+1$ est décroissante (à vérifier) et ses images sont toutes des éléments de $[1\,;+\infty[$.
Sur $[1\,;+\infty[$, la fonction $X\mapsto\sqrt{X}$ est croissante.

Leur composée, f est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

2. Si $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, on a $0\le 2x\le\pi$, donc $-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$.

Or la fonction $x\mapsto 2x-\frac{\pi}{2}$ est croissante sur I et ses images appartiennent à $J=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; sur J, la fonction sinus est croissante. Leur composée, f est donc croissante sur I.

Attention
Si là, vous trouvez cela trop facile, puis-je me permettre de vous suggérer de refaire ces exercices, sans regarder la solution ?

3. Montrer que f est majorée, minorée

Méthode 3.1. : Un majorant ou un minorant est donné

Si un majorant M est donné, vérifier que pour tout x de **I**, $f(x) - M \le 0$.
Si un minorant m est donné, vérifier que pour tout x de **I**, $f(x) - m \ge 0$.

Exemple

1. Montrer que la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ est majorée par 2 , sur $\mathbf{I} =]-\infty\,;3]$.

2. Montrer que la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{4x-2}{x-2}$ est minorée par 5, sur l'intervalle $\mathbf{I} =]\,2\,;6]$.

3. Vérifier que f telle que $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par − 1 et 1.

Solution

1. $f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$; $x^2 \ge 0$ pour tout x et $x - 3 \le 0$ pour $x \le 3$. Donc $f(x) - 2 \le 0$ pour $x \le 3$. $\boxed{\text{f est majorée par 2 sur I.}}$

2. $f(x) - 5 = \dfrac{4x-2}{x-2} - 5 = \dfrac{-x+8}{x-2}$. Comme x > 2, $x - 2 > 0$ et comme $x \le 6$, $-x \ge -6$, donc $-x + 8 \ge 2 \ge 0$.
On a donc $f(x) - 5 \ge 0$ pour tout x de **I** ; $\boxed{\text{f est minorée par 5 sur I.}}$
Comme exercice, vérifier que f est minorée par $5{,}5$ sur **I**.

3. $f(x) - 1 = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} - 1 = \dfrac{-2}{x^2+1}$ et $f(x) + 1 = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} + 1 = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.
Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout x, $f(x) - 1 \le 0$ et $f(x) + 1 \ge 0$ pour tout x, donc pour tout x réel : $\boxed{-1 \le f(x) \le 1.}$

Attention
Un majorant de la vitesse d'une voiture sur autoroute est 500 km/h.
Ce majorant n'est pas le maximum autorisé qui est de 130 km/h !

Méthode 3.2. Le majorant n'est pas donné

► On peut conjecturer un majorant d'après l'expression de f(x) ou d'après la représentation graphique sur la calculatrice.
► On peut partir d'une inégalité connue pour majorer f.
► On peut étudier le sens de variation de f (voir § 4.)

Exemple

1. Montrer que f telle que $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f telle que $f(x)=\dfrac{x+0{,}25}{x^2+0{,}5}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que f telle que $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{2+\cos x}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. On a : $3x^2+1\leq 3x^2+3$, donc puisque $x^2+1>0$,
$\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}\leq\dfrac{3x^2+3}{x^2+1}$, soit $f(x)\leq 3$; $\boxed{\text{f est majorée par 3.}}$

2. La représentation semble minorée par 0 et majorée par 1.
Elle est minorée par 0 car $x^2+0{,}5>0$ et $x+0{,}25\geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
$1-\dfrac{x+0{,}25}{x^2+0{,}5}=\dfrac{x^2-x+0{,}25}{x^2+0{,}5}=\dfrac{(x-0{,}5)^2}{x^2+0{,}5}$; cette différence est positive car un carré est toujours positif. $\boxed{\text{f est majorée par 1.}}$

3. On sait que sur $\mathbb{R}$: $0\leq|\sin x|\leq 1$ (1) et que $-1\leq\cos x\leq 1$, donc $2-1\leq 2+\cos x\leq 2+1$, soit : $1\leq 2+\cos x\leq 3$. Comme la fonction $X\mapsto\dfrac{1}{X}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{2+\cos x}\leq 1$ (2)
En multipliant membre à membre les inégalités (1) et (2), qui ne concernent que des réels positifs, on obtient : $\boxed{0\leq\dfrac{|\sin x|}{2+\cos x}\leq 1.}$

Attention
Un majorant M de f ne vient jamais seul !
Tous les réels $M+k$, avec $k\geq 0$, sont aussi des majorants de f.