Chapitre 1

Introduction

1.1 Définition d'un signal

Un signal est généralement constitué d'un ensemble de valeurs numériques, qui peuvent être par exemple les valeurs d'une grandeur physique mesurées au fil du temps. Ce signal est souvent représenté par une fonction mathématique dépendant d'une ou plusieurs variables. Dans cet ouvrage, c'est surtout cette fonction qu'on appelle « signal », en éludant son éventuelle origine physique. En effet, on a ici seulement besoin de définir précisément ce signal en tant que fonction mathématique, pour pouvoir la manipuler ensuite, non pas d'étudier la grandeur physique associée. Un objectif majeur de ce livre reste néanmoins le développement de méthodes de traitement applicables à des signaux expérimentaux, en particulier des signaux électromagnétiques et acoustiques dans les Parties II et III (voir Chapitres 7 et 11). Au-delà d'une présentation mathématique, nous fournirons donc aussi la signification physique de divers concepts que nous développerons.

Dans la Partie I de cet ouvrage, on se restreint aux signaux monodimensionnels, c.-à-d. aux fonctions d'une seule variable[1]. Cette variable est souvent le temps, noté t ci-dessous. Un signal, noté x, est alors un ensemble de valeurs, notées $x(t)$. Par abus de langage, on notera généralement aussi $x(t)$ le signal temporel complet ainsi défini, non pas seulement sa valeur à un instant t donné.

Exemples de signaux :

1. tension électrique fournie au fil du temps par un circuit électronique ou un capteur (par exemple un microphone),
2. signal constitué des valeurs de la pression de l'air mesurées au fil du temps en un point fixe de l'espace.

   Notons que ce signal d'origine acoustique peut être converti en un signal électrique, en plaçant un microphone au point considéré. On établit ainsi un lien avec le premier exemple de signal présenté ci-dessus.

A l'intérieur de cet ensemble englobant tous les signaux temporels, on peut introduire différents partitionnements, suivant divers critères. C'est ce que nous réalisons ci-dessous. Cela nous conduit à définir diverses classes de signaux.

1.2 Classification des signaux

1.2.1 Signaux continus et discrets

Le caractère continu ou discret des signaux comporte les deux aspects introduits ci-dessous.

[1] En plus de cette variable, les signaux aléatoires étudiés au Chapitre 6 dépendent, au niveau élémentaire, de l'éventualité considérée.

Signaux à temps continu ou discret

Suivant le signal considéré, en particulier suivant son origine physique, les valeurs de ce signal peuvent être disponibles sur deux types de domaines :

- elles peuvent être disponibles à chaque instant (sur un intervalle temporel borné en pratique), c.-à-d. dans un domaine continu du temps.
  Exemples :
  1. tension de sortie d'un « filtre LC », c.-à-d. d'un circuit électronique constitué d'inductances L et de condensateurs C,
  2. plus généralement, tension de sortie d'un circuit électronique analogique, c.-à-d. d'un circuit traitant des « signaux analogiques », dont la définition est rappelée à la fin de cette Section 1.2.1.
- Les valeurs du signal peuvent aussi être disponibles seulement pour un ensemble d'instants discret (et fini en pratique).
  Exemple : mesures de l'acidité de l'eau d'une rivière (c.-à-d. de son pH), réalisées une fois par jour par un opérateur humain ou une machine.

Les deux types de signaux définis ci-dessus sont respectivement dits « à temps continu » et « à temps discret ».

Signaux à valeurs continues ou discrètes

De même, suivant le signal considéré, la valeur de ce signal à un instant peut appartenir à deux types de domaines :

- le signal peut varier continûment, c.-à-d. il peut prendre n'importe quelle valeur (éventuellement dans une certaine gamme de fonctionnement).
  Exemple : tension de sortie d'un filtre LC.
- Ou bien, chaque valeur du signal peut appartenir seulement à un ensemble donné, discret (et fini en pratique), de valeurs possibles.
  Exemple : états logiques binaires (c.-à-d. « 0 » ou « 1 », typiquement associés à des tensions voisines de 0 V ou 5 V respectivement), fournis par :
  1. un ordinateur sur un fil d'un de ses bus,
  2. ou, plus généralement, un circuit électronique numérique, c.-à-d. un circuit traitant des « signaux numériques », dont la définition est rappelée ci-dessous.

Les deux types de signaux définis ci-dessus sont respectivement dits « à valeurs continues » et « à valeurs discrètes ».

Les combinaisons de ces propriétés de continuité/discontinuité, relatives aux instants considérés et aux valeurs du signal, définissent au total $2 \times 2 = 4$ types de signaux, qui sont représentés en Figure 1.1 dans le cas de signaux à valeurs réelles. Cette représentation se généralise directement au cas de signaux à valeurs complexes, par exemple en traçant séparément les variations des parties réelle et imaginaire du signal considéré, ou les variations de son module et de sa phase. Parmi les quatres types de signaux ainsi introduits, on distingue en particulier :

- les signaux analogiques, qui sont les signaux à temps continu et à valeurs continues,
- les signaux numériques, qui sont les signaux à temps discret et à valeurs discrètes.

Les outils mathématiques utilisés pour représenter et traiter ces signaux dépendent de la classe de signaux considérée, en particulier du fait qu'ils soient à temps continu ou à temps discret. Dans cet ouvrage, on considère principalement les signaux à temps continu, aussi bien à valeurs continues qu'à valeurs discrètes.

1.2.2 Signaux déterministes et aléatoires

Les signaux se répartissent en deux classes sur le plan suivant :

1. signaux déterministes :
   ce sont les signaux dont les variations au fil du temps sont complètement déterminées (d'où le

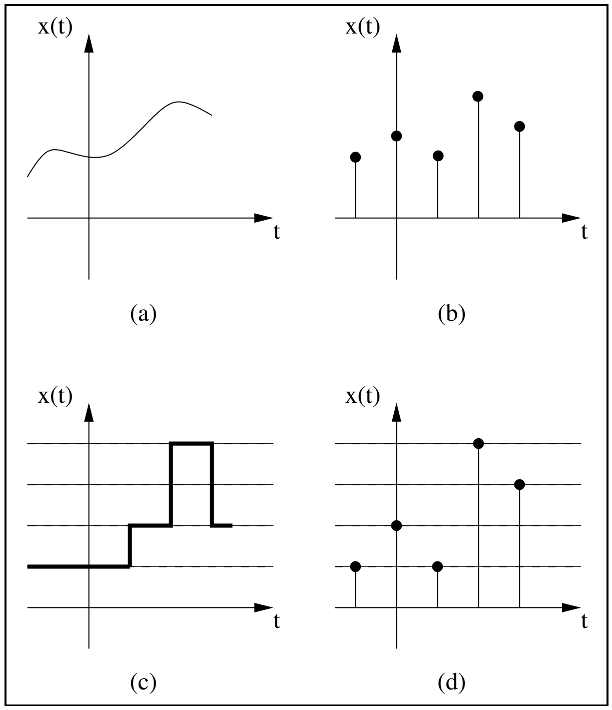

FIG. 1.1 – Signaux continus et discrets : (a) signal à temps t continu et à valeurs $x(t)$ continues, (b) signal à temps discret et à valeurs continues (chaque « boule » définit, par son ordonnée, la valeur du signal à l'instant concerné), (c) signal à temps continu et à valeurs discrètes (chaque ligne horizontale hachurée définit une des valeurs possibles du signal), (d) signal à temps discret et à valeurs discrètes.

nom de ces signaux), c.-à-d. définies par l'expression littérale ou les valeurs numériques de la fonction temporelle considérée. Le terme « fonction » est ici employé dans le sens classique : une fonction (sous-entendu « déterministe ») est une loi de correspondance fixée qui, à un nombre réel t, associe un unique nombre réel[2] $x(t)$.

Exemple : tension sinusoïdale ayant une amplitude A, une pulsation ω_0 (donc une fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$) et une phase à l'origine ϕ données : la valeur $x(t)$ du signal x à un instant t quelconque est entièrement définie par l'expression :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi). \tag{1.1}$$

La Figure 1.2 représente à titre d'exemple deux versions de ce type de signal, respectivement à temps continu ou discret, suivant la nature du domaine (ici borné) couvert par la variable t.

Les signaux déterministes seront étudiés plus en détail au Chapitre 2. Les quelques considérations que nous venons de fournir à leur sujet peuvent sembler banales, mais elles prennent tout leur sens par contraste avec la définition que nous allons maintenant donner pour les signaux aléatoires.

2. Signaux aléatoires :
ce sont les signaux pour lesquels on ne dispose pas de la représentation définie ci-dessus et dont on ne connaît que les propriétés statistiques (telles que leur moyenne ou leur densité de probabilité, qui sont des grandeurs très classiques que nous définirons aux Chapitres 4 à 6).

Exemples :
- tension de bruit en sortie d'un récepteur radio,
- signal de parole, c.-à-d. typiquement tension fournie par un microphone et correspondant à l'enregistrement de parole considéré.

[2] Ou, plus généralement, un nombre complexe dans le cas d'un signal à valeurs complexes.

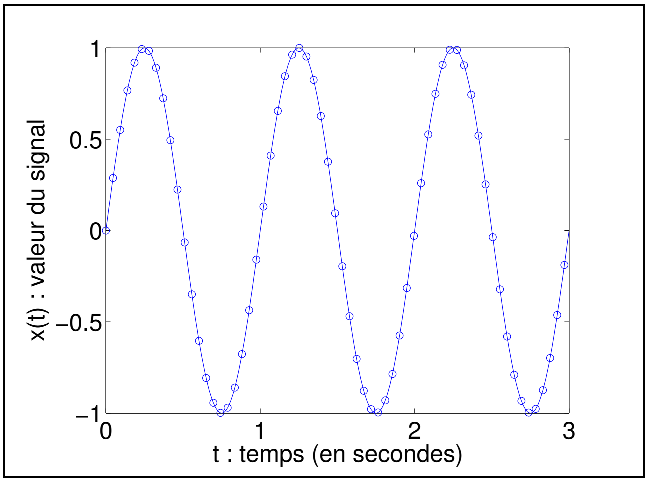

FIG. 1.2 – Signal sinusoïdal : (a) version à temps continu : courbe continue, (b) version à temps discret : chaque valeur est repérée par un cercle (ces cercles ou « boules creuses » correspondent aux « boules pleines » de la Figure 1.1 (b) ; on ne leur a pas ici associé de « barres verticales », afin d'alléger la représentation).

Les signaux aléatoires sont donc définis à l'aide de la théorie des probabilités, en termes de « fonctions aléatoires ». Le volet « aléatoire » de la Partie I de cet ouvrage a pour premier objectif de définir précisément ces signaux. Ce volet est donc structuré de la manière suivante :

- nous présenterons tout d'abord les concepts fondamentaux relatifs aux probabilités au Chapitre 3.
- Puis nous détaillerons les notions concernant les variables aléatoires aux Chapitres 4 et 5.
- Enfin, nous en viendrons aux signaux aléatoires au Chapitre 6. Nous montrerons en particulier qu'un signal aléatoire définit à chaque instant une variable aléatoire. Les variables aléatoires constituent donc une notion intermédiaire qu'on doit approfondir pour pouvoir étudier ensuite les signaux aléatoires. Ces signaux seront largement utilisés dans les méthodes de traitement présentées en Parties II et III de cet ouvrage.

■——— *Lien entre signaux déterministes et aléatoires*

Comme le suggère la présentation ci-dessus, le caractère aléatoire d'un signal n'est pas nécessairement intrinsèque à ce signal : il peut être relatif à la personne qui veut l'utiliser, c.-à-d. lié au degré de connaissance que possède cette personne au sujet de ce signal. Ce degré de connaissance peut être différent de celui que possède une autre personne, en particulier celle qui a préalablement généré ce signal. Nous allons illustrer cette notion à l'aide d'un exemple.

Considérons la situation dans laquelle un premier protagoniste, Albert, génère un signal de la manière suivante : il calcule les valeurs d'une sinusoïde donnée (c.à-d. définie par (1.1), avec des valeurs fixées de paramètres), pour des valeurs de t connues, quelconques et formant un ensemble discret. Albert obtient ainsi un signal $x(t)$ sinusoïdal à temps discret, qu'il peut représenter graphiquement comme en Figure 1.2 (b). Supposons maintenant qu'Albert transmette à une autre protagoniste, Zoé, cet ensemble de valeurs, mais sans lui indiquer à quels instants elles correspondent. Zoé ne dispose ainsi que d'un « paquet informe » de valeurs du signal $x(t)$, appelées « échantillons du signal ». Si Zoé veut représenter et manipuler cet ensemble de valeurs sous forme de signal, la solution la plus simple consiste pour elle à les ordonner de manière arbitraire, en associant à chacune de ces valeurs un numéro entier, appelé « indice d'échantillon » et noté n ci-dessous. Zoé crée ainsi une série ordonnée de valeurs, formant un signal dont on peut noter les valeurs $y(n)$, ou encore $y(t)$ pour conserver le même type de notation que précédemment, en gardant alors présent à l'esprit le fait qu'on ne dispose des valeurs de ce signal y que pour les valeurs entières de t (sur un intervalle borné). Le signal y ainsi obtenu est donc à temps discret et peut être réprésenté graphiquement de la même manière que le signal déterministe à temps discret considéré plus haut en Figure 1.2 (b). A titre d'exemple, une représentation ainsi obtenue pour y est constituée des cercles apparaissant sur la Figure 1.3. Il est plus facile de percevoir la forme de l'évolution temporelle du signal y en reliant ces cercles par des traits, comme si on disposait en fait d'un signal à temps continu $y(t)$ connu pour toute valeur entière de t et qui varierait linéairement entre ses valeurs d'échantillons considérées ci-dessus[3]. La courbe continue ainsi obtenue est aussi représentée en Figure 1.3.

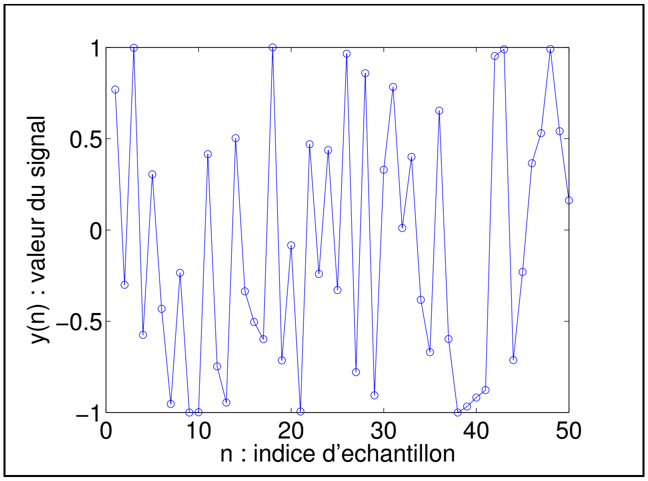

FIG. 1.3 – (a) signal à temps discret constitué de valeurs (ou échantillons) réordonnées de manière arbitraire et repérées par des cercles, (b) courbe continue reliant les échantillons et définissant un signal à temps continu.

Ne disposant que du signal y et de la Figure 1.3, Zoé sera amenée à considérer que ce signal ne semble pas avoir de « structure » particulière (à la différence de la forme régulière, sinusoïdale, de la Figure 1.2). Une approche naturelle consistera donc pour elle à traiter comme un signal aléatoire[4] l'ensemble des valeurs de x dont elle dispose, en utilisant ses propriétés statistiques. Cette approche fondée sur le formalisme des signaux aléatoires sera donc bien rendue nécessaire pour Zoé par sa connaissance limitée du signal considéré (alors qu'Albert a au contraire accès à la structure du signal initial x).

Dans un registre voisin et de manière beaucoup plus générale, le domaine des télécommunications utilise très largement le formalisme des signaux aléatoires. Ceci provient du fait que, du point de vue de la personne qui reçoit le signal considéré, ce signal n'est pas ou peu connu. En effet, s'il connaissait déjà ce signal à l'avance, le destinataire n'aurait pas besoin d'établir une communication afin de le recevoir ! ■

1.3 Conclusions et extensions

Dans ce chapitre, nous avons introduit les concepts fondamentaux relatifs aux signaux temporels. Nous avons aussi suggéré comment est structurée la suite de l'étude de ces signaux, qui fait l'objet de cette Partie I de l'ouvrage :

- au Chapitre 2, nous allons nous intéresser aux signaux déterministes (à temps continu),
- puis nous consacrerons les Chapitres 3 à 6 à la construction d'outils relatifs aux phénomènes aléatoires.

[3]La fonction $y(t)$ ainsi créée n'est en général pas dérivable aux instants $t = n$, qui correspondent aux échantillons du signal effectivement disponibles.

[4]Plus précisément, en utilisant la terminologie qui sera définie en page 123, on dispose ici d'une trajectoire d'un signal aléatoire.

Chapitre 2

Signaux déterministes à temps continu

2.1 Représentation temporelle

Nous avons défini au Chapitre 1 le concept général de signal, ainsi que diverses classes particulières de signaux. Les outils de représentation et traitement des signaux dépendent de la classe de signaux considérée. Dans ce chapitre-ci, nous présentons les outils relatifs à la classe constituée des signaux monodimensionnels (fonctions du temps t), à temps continu et déterministes. Cette classe pourrait être considérée comme composée elle-même de deux sous-classes, suivant que les signaux étudiés sont à valeurs continues ou discrètes. Il ne sera cependant pas nécessaire de distinguer ces deux sous-classes dans ce chapitre, car les notions présentées s'appliquent quel que soit le domaine des valeurs prises par les signaux considérés. De même, ces notions seront essentiellement présentées dans le cas général des signaux à valeurs complexes et s'appliqueront donc en particulier au cas des signaux à valeurs réelles.

Ce chapitre couvre donc les deux types de signaux dont la représentation graphique est rappelée en Figure 2.1, pour des signaux à valeurs réelles, et dont des exemples concrets ont été donnés au Chapitre 1. La représentation mathématique « naturelle » ainsi considérée au départ pour un signal x est donc définie par les variations de ce signal en fonction du temps t. D'autres représentations d'un tel signal peuvent ensuite être construites en appliquant diverses transformations à cette fonction $x(t)$. Nous allons maintenant présenter les transformations les plus classiques.

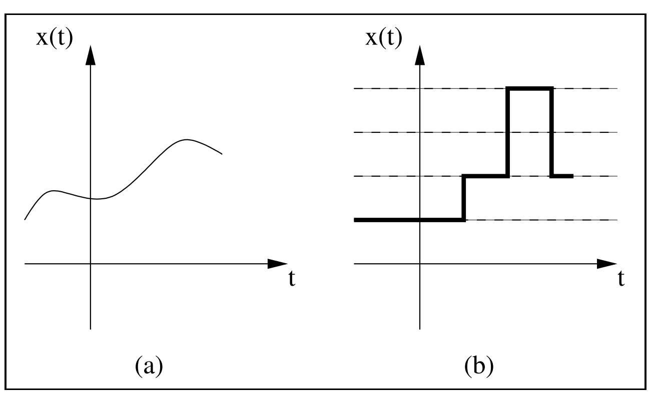

FIG. 2.1 – Signaux à temps continu : (a) signal à temps t continu et à valeurs $x(t)$ continues, (b) signal à temps continu et à valeurs discrètes (chaque ligne horizontale hachurée définit une des valeurs possibles du signal).

2.2 Transformations et représentation fréquentielle (rappels)

Nous rappelons[1] ici les notions fondamentales relatives, d'une part à la transformation de Fourier et à la représentation fréquentielle des signaux, et d'autre part à la transformation de Laplace. Nous indiquons aussi le lien direct qui existe entre ces transformations.

2.2.1 Représentation d'un signal périodique par une série de Fourier

On considère ici les signaux $x(t)$ qui vérifient les hypothèses introduites en Section 2.1 et qui sont de plus périodiques, de période[2] notée T, c.-à-d. les signaux tels que

$$x(t+T) = x(t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

On définit les **coefficients de Fourier** (aussi appelés coefficients spectraux[3]) d'un tel signal $x(t)$ par[4] :

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt} \tag{2.2}$$

où $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ est appelée pulsation fondamentale du signal. La fréquence correspondante est alors $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{T}$. Elle est appelée fréquence fondamentale du signal.

Inversement, le signal $x(t)$ peut s'exprimer de la manière suivante en fonction de ces coefficients c_n :

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}.} \tag{2.3}$$

Cette expression constitue une **série de Fourier**. Le signal $x(t)$ est ainsi vu comme une combinaison linéaire d'exponentielles complexes ayant diverses pulsations, égales à $n\omega_0$ (les fréquences correspondantes de ces exponentielles sont donc égales à nf_0). Les coefficients de Fourier c_n associés à ces exponentielles peuvent être à valeurs complexes. La représentation graphique des modules de ces coefficients fournit une représentation fréquentielle en amplitude du signal $x(t)$, illustrée en Figure 2.2 (le même principe s'applique bien sûr à la phase des coefficients c_n). Le bas de cette figure définit les dénominations des raies composant ce spectre d'amplitude : composante continue (raie en $\omega = 0$), fondamental (raies en $\omega = \pm\omega_0$), harmoniques (autres raies, aux pulsations multiples de ω_0).

La relation (2.2) est qualifiée de formule d'analyse, puisqu'elle permet d'analyser le signal $x(t)$ pour en extraire les grandeurs c_n qui le caractérisent. De même, la relation (2.3) est appelée formule de synthèse, car elle permet de reconstruire[5] (ou synthétiser) le signal $x(t)$ à partir des paramètres c_n.

Exemple 1 Considérons le signal sinusoïdal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$. En utilisant la classique décomposition de la fonction cosinus en exponentielles complexes, ce signal peut être réexprimé suivant :

$$x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}. \tag{2.4}$$

---

[1] Il s'agit bien ici de *rappels*, c.-à-d. d'un résumé de notions parmi les plus classiques en traitement du signal et donc supposées déjà connues du lecteur, par opposition à la plus grande partie de cet ouvrage, où on présentera explicitement la *construction* des outils considérés. Pour plus de détails sur les points abordés ici, le lecteur pourra se reporter en particulier à [1] ou [4].

[2] Plus précisément, on considère la plus petite période non nulle du signal étudié. Ce signal est alors aussi périodique de période kT pour tout entier strictement positif k.

[3] Ce terme est employé par référence à la décomposition spectroscopique de la lumière en composantes élémentaires (ou raies spectrales) qui correspondent à différentes fréquences, donc à différentes couleurs dans le cas de la lumière visible.

[4] On note j « la » racine carrée complexe de -1, c.-à-d. $j = (-1)^{\frac{1}{2}}$.

[5] Voir par exemple [1] pour plus de détails sur : a) « l'écart mineur » possible entre le signal $x(t)$ disponible au départ et le signal reconstruit à l'aide de l'expression (2.3), et b) des conditions de convergence de cette série (2.3).

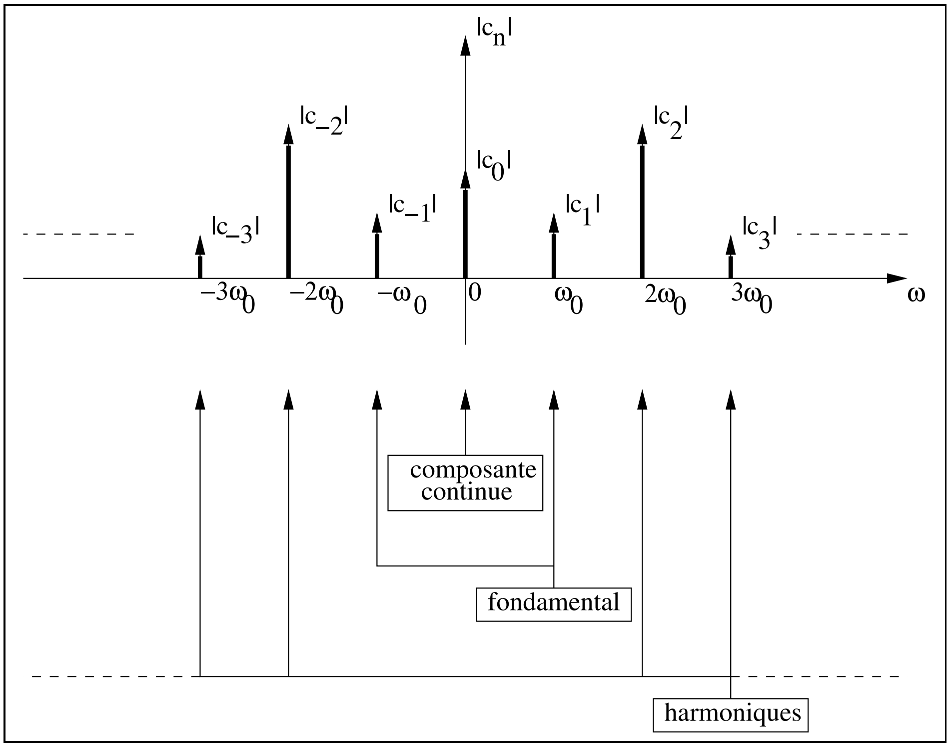

FIG. 2.2 – Haut de la figure : représentation fréquentielle en amplitude d'un signal à temps continu périodique : chaque ligne verticale fléchée définit une des raies de ce spectre ; son abscisse définit la pulsation $n\omega_0$ de cette raie ; l'ordonnée de l'extrémité de la flèche définit l'amplitude (c.-à-d. le module) $|c_n|$ de cette raie. Bas de la figure : dénomination des raies composant ce spectre (voir texte).

En comparant cette expression (2.4) à (2.3), on voit que (2.4) fournit directement (c.-à-d. sans devoir calculer ici les c_n à l'aide de (2.2)) la représentation en série de Fourier du signal considéré ici : ses coefficients de Fourier sont définis par

$$c_1 = \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2} \tag{2.6}$$

$$c_n = 0 \quad \text{si} \quad |n| \neq 1. \tag{2.7}$$

Pour ce signal, la représentation graphique de la Figure 2.2 se réduit à deux raies d'amplitude $\frac{1}{2}$, situées à la pulsation fondamentale ω_0 et à la pulsation $-\omega_0$.

Exemple 2 La représentation en série de Fourier s'applique au cas idéal d'un signal acoustique constitué d'une note musicale produite par un orgue, cette note étant supposée « éternelle » puisque par hypothèse on considère ici des signaux variant de manière périodique depuis $t \to -\infty$ jusqu'à $t \to +\infty$. La valeur de la fréquence fondamentale f_0 définit alors quelle note de la gamme est jouée : une valeur faible de f_0 correspond à un son grave[6], tandis qu'une valeur élevée est associée à un son aigu. Les amplitudes complexes c_n du fondamental et des harmoniques définissent quant à elles le « volume » et le timbre de l'instrument considéré. Le cas le plus simple est celui d'un son dont les harmoniques (et la composante continue) ont une amplitude nulle. On retombe alors sur le cas d'un signal sinusoïdal, tel que celui considéré dans l'Exemple 1.

[6]On considère le cas classique où l'amplitude de la composante à la fréquence fondamentale est conséquente par rapport aux amplitudes des composantes harmoniques.