Jour n^{o}1

Exercice 1.1

1) Définir stigmatisme et aplanétisme.

2) Rappeler les conditions de l'approximation de Gauss.

3) Énoncer les lois de Descartes pour la réfraction.

4) Retrouver la relation de conjugaison d'un dioptre plan. On notera n_1 et n_1 les indices des milieux, A l'objet considéré, H son projeté orthogonal sur le dioptre et I le point d'incidence du rayon étudié.

5) Déterminer $\overline{\mathrm{AA'}}$ en fonction de e et n, si A$'$ est l'image de A à travers une plaque d'indice n et d'épaisseur e.

6) Un miroir plan est placé au fond d'une cuve remplie d'eau (indice n) jusqu'à une hauteur h. Un objet A est situé à une distance d au-dessus de la surface de l'eau. Déterminer la position de l'image finale A$'$ de A par ce système, pour un observateur situé au-dessus de l'eau ; on repérera A$'$ par rapport à la surface de l'eau.

7) On vide la cuve ; déterminer sa position pour que l'image de A soit la même que précédemment.

Exercice 1.2

1) Définir la chaleur latente de vaporisation molaire.

2) Énoncer et démontrer la formule de Clapeyron.

3) En effectuant des approximations à préciser, déterminer p_{sat} à T_2 en fonction de $p_{sat}(T_1)$, T_1 et T_2.
Effectuer l'application numérique pour l'eau, avec $l_{vap} = 2260$ kJ.kg^{-1} ; $T_1 = 273$ K ; $T_2 = 323$ K et $p_{sat}(T_1) = 2300$ Pa.

4) On vaporise à T_1 et $p_{sat}(T_1)$ une masse m d'eau. Déterminer le transfert thermique et le travail reçus par l'eau au cours de cette transformation, ainsi que ses variations d'énergie interne et d'entropie.

Énoncé

1) Définir stigmatisme et aplanétisme.

2) Rappeler les conditions de l'approximation de Gauss.

3) Énoncer les lois de Descartes pour la réfraction.

4) Retrouver la relation de conjugaison d'un dioptre plan. On notera n_1 et n_1 les indices des milieux, A l'objet considéré, H son projeté orthogonal sur le dioptre et I le point d'incidence du rayon étudié.

5) Déterminer $\overline{\mathrm{AA}'}$ en fonction de e et n, si A′ est l'image de A à travers une plaque d'indice n et d'épaisseur e.

6) Un miroir plan est placé au fond d'une cuve remplie d'eau (indice n) jusqu'à une hauteur h. Un objet A est situé à une distance d au-dessus de la surface de l'eau. Déterminer la position de l'image finale A′ de A par ce système, pour un observateur situé au-dessus de l'eau ; on repérera A′ par rapport à la surface de l'eau.

7) On vide la cuve ; déterminer sa position pour que l'image de A soit la même que précédemment.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice d'optique géométrique, portant donc uniquement sur le programme de première année. Il suit la progression classique, en commençant par des rappels de cours et des applications usuelles déjà traitées en classe ; les cinq premières questions doivent être réglées assez rapidement, de façon à garder du temps pour les questions finales un peu plus délicates.

1) On distinguera ici stigmatisme ou aplanétisme rigoureux et approchés, et on donnera des exemples de systèmes optiques concernés. La définition de l'aplanétisme nécessite de faire appel à la notion de système centré.

↪ C'est une question de cours, qui doit être traitée sans difficulté.

2) Il s'agit de caractériser la situation et l'inclinaison des rayons incidents. On pourra préciser comment on procède usuellement en pratique pour se placer dans le cadre de cette approximation.

↪ Cette approximation constitue la base de toute l'étude des lentilles et des dioptres menée en première année ; il est donc indispensable de bien la connaître...

3) Il s'agit bien « des » lois de Descartes : outre la relation entre les angles caractérisant les rayons incident et refracté, il faut préciser leur situation dans l'espace.

↪ C'est encore une question de cours très classique, à maîtriser absolument ; attention à bien orienter les angles (toujours de la normale vers le rayon).

4) Il faut ici considérer deux rayons partant de A. L'un, passant par H, n'est pas dévié ; l'autre, incident en I voisin de H, est dévié selon la loi précédemment citée. Dans le cadre d'un stigmatisme approché, A′ est forcément située à l'intersection du prolongement des deux rayons émergents.
En repérant i_1 et i_2 dans les triangles AHI et A'HI, on peut écrire leur tangente et

en faire le rapport. En exploitant le fait que l'on travaille sur de petits angles, on peut alors donner une valeur approchée de ce rapport, puis l'exprimer également en fonction des indices — grâce à la loi de Descartes — pour en déduire finalement la relation de conjugaison.

$\hookrightarrow$ Il s'agit d'une démonstration de cours faisant appel à des techniques et approximations usuelles en optique géométrique, et qui ne doit pas poser de problème.

5) La relation de conjugaison établie à la question précédente doit ici être utilisée de façon systématique : il n'est pas nécessaire (et trop compliqué) de revenir aux lois de Descartes et à l'étude des différents angles intervenant.
On écrit donc la relation de conjugaison pour le premier dioptre, précisant la position de l'image intermédiaire A_1 par rapport à H projeté de A ; de même pour la position de A' par rapport à H', projeté de A_1 sur ce second dioptre. La distance HH' étant connue, il est aisé de combiner les deux relations pour obtenir l'expression recherchée.

$\hookrightarrow$ On pourra vérifier la cohérence de ce résultat (à retenir de façon qualitative) en testant la valeur $n = 1$, qui doit évidemment conduire à $\overline{\mathrm{AA}'} = 0$.

6) À nouveau, un schéma permettra de situer qualitativement les images intermédiaires A_1 et A_2 ; mais ce sont bien les relations de conjugaison qui caractérisent leur position de façon précise. Il faut définir les projetés de A sur la surface de l'eau et sur le miroir, et rappeler la relation de conjugaison de ce dernier. La combinaison des différentes égalités ainsi établies permet alors de déterminer $\overline{\mathrm{HA}'}$.

$\hookrightarrow$ Cette question peut sembler difficile au premier abord ; mais un schéma soigné, accompagné d'une écriture méthodique des relations de conjugaison, doit permettre de résoudre le problème de façon efficace.

7) Une fois la cuve vidée, l'image est obtenue par le miroir uniquement, et il suffit donc d'appliquer la relation de conjugaison de ce dernier pour caractériser A', à comparer avec la position précédemment déterminée.

$\hookrightarrow$ Cette question est plus facile que la précédente, et on pourra la traiter en partie même si le 6) n'a pas été résolu.

Corrigé

1) Un système optique est stigmatique si tout faisceau incident issu de, ou se dirigeant vers, un point A donne à la sortie du système un faisceau convergeant en un point, ou semblant provenir d'un unique point A'. Autrement dit :

un système optique est dit stigmatique si tout point objet A a pour image un unique point A'.

On dit alors que ces deux points sont conjugués.
Par ailleurs, les systèmes optiques centrés (possédant un axe de symétrie) sont aplanétiques si :

l'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique est perpendiculaire à l'axe optique.

Seul le miroir plan est rigoureusement stigmatique et aplanétique en tout point. Pour les autres systèmes étudiés à notre niveau, stigmatisme et aplanétisme sont seulement approchés, lorsqu'on se place dans les conditions de Gauss.

2) L'approximation de Gauss est l'approximation linéaire de l'optique géométrique obtenue lorsque :

$$\boxed{\text{les rayons sont paraxiaux, c'est-à-dire proches de l'axe et peu inclinés sur l'axe.}}$$

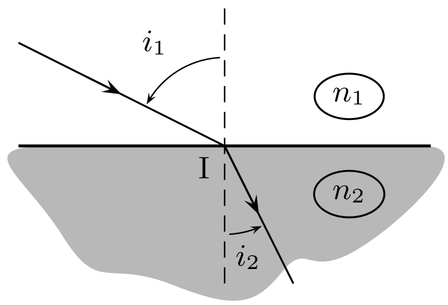
En pratique, on se place dans les conditions de Gauss en diaphragmant le faisceau incident (sans excès pour éviter sa diffraction) ou en utilisant un faisceau laser.
Dans ce cadre, les angles mis en jeu vérifient les égalités approchées :

$$\sin i \simeq \tan i \simeq i.$$

3) La première loi de la réfraction permet d'affirmer que le rayon réfracté appartient au plan d'incidence, défini par le rayon incident et la normale au dioptre en I. La seconde loi précise que :

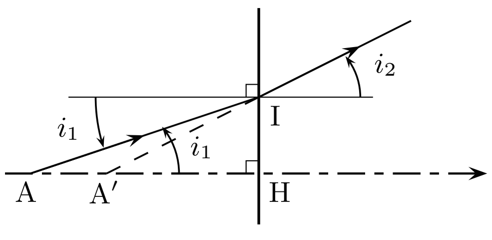
$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.}$$

Dans l'exemple choisi $n_2 > n_1$, donc $i_2 < i_1$:



Il est important d'indiquer le sens de propagation de la lumière sur le rayon choisi, et surtout l'orientation des angles, définis à partir de la normale.

4) Au passage par le dioptre, la lumière suit les **lois de la réfraction de Descartes** rappelées ci-dessus.
Pour déterminer (qualitativement) la position de l'image A′, on trace le rayon réfracté associé à un rayon incident quelconque (on choisit ici $n_2 < n_1$, d'où $i_2 > i_1$). On trace également le rayon non dévié perpendiculaire au dioptre (passant par H).
Dans le cadre de l'approximation de Gauss, l'image de A est unique et correspond forcément à l'intersection des deux rayons émergents ; il s'agit d'une **image virtuelle** ici.



Dans les triangles HAI et HA′I on peut écrire :

$$\tan i_1 = \frac{\overline{\mathrm{HI}}}{\overline{\mathrm{AH}}} \qquad \text{et} \qquad \tan i_2 = \frac{\overline{\mathrm{HI}}}{\overline{\mathrm{A'H}}}$$

d'où

$$\boxed{\overline{\mathrm{A'H}} = \frac{\tan i_1}{\tan i_2}\overline{\mathrm{AH}}.}$$

Attention au maniement des valeurs algébriques ici. Avec les conventions d'orientation usuelles, $\overline{\text{AH}}$ et $\overline{\text{HI}}$ sont positifs, et i_1 l'est également ; on ne pourrait donc pas écrire $\overline{\text{HI}} = \overline{\text{HA}} \tan i_1$ par exemple.

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on a :

$$\sin i_1 \simeq \tan i_1 \simeq i_1 \qquad \text{et bien sûr} \qquad \sin i_2 \simeq \tan i_2 \simeq i_2.$$

La relation précédente devient alors :

$$\overline{\text{A}'\text{H}} = \frac{i_1}{i_2} \overline{\text{AH}}$$

et la loi de Descartes permet d'écrire :

$$n_1 i_1 = n_2 i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

d'où l'on tire

$$\boxed{\overline{\text{A}'\text{H}} = \frac{n_2}{n_1}\overline{\text{AH}} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{n_2}{\overline{\text{A}'\text{H}}} = \frac{n_1}{\overline{\text{AH}}}.}$$

5) On a ici la succession d'images suivantes par les dioptres $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$:

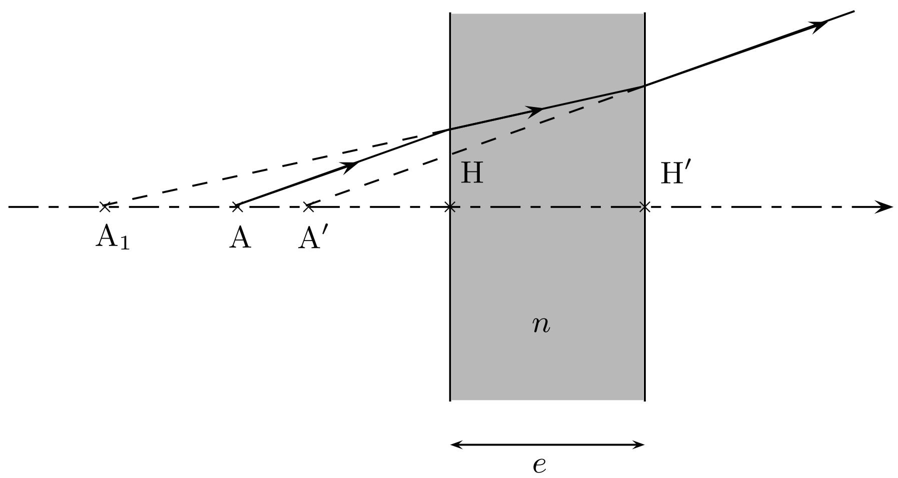
$$\text{A} \xrightarrow{\mathcal{D}_1} \text{A}_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \text{A}'.$$

L'image de A par $\mathcal{D}_1$ (dioptre air-verre) est A_1 tel que :

$$\overline{\text{HA}_1} = n\overline{\text{HA}}$$

et l'image finale A′ vérifie, avec H′ point du dioptre $\mathcal{D}_2$ (verre-air) situé sur l'axe AA′ :

$$\overline{\text{H}'\text{A}'} = \frac{\overline{\text{H}'\text{A}_1}}{n}.$$



D'où, en utilisant la relation de Chasles :

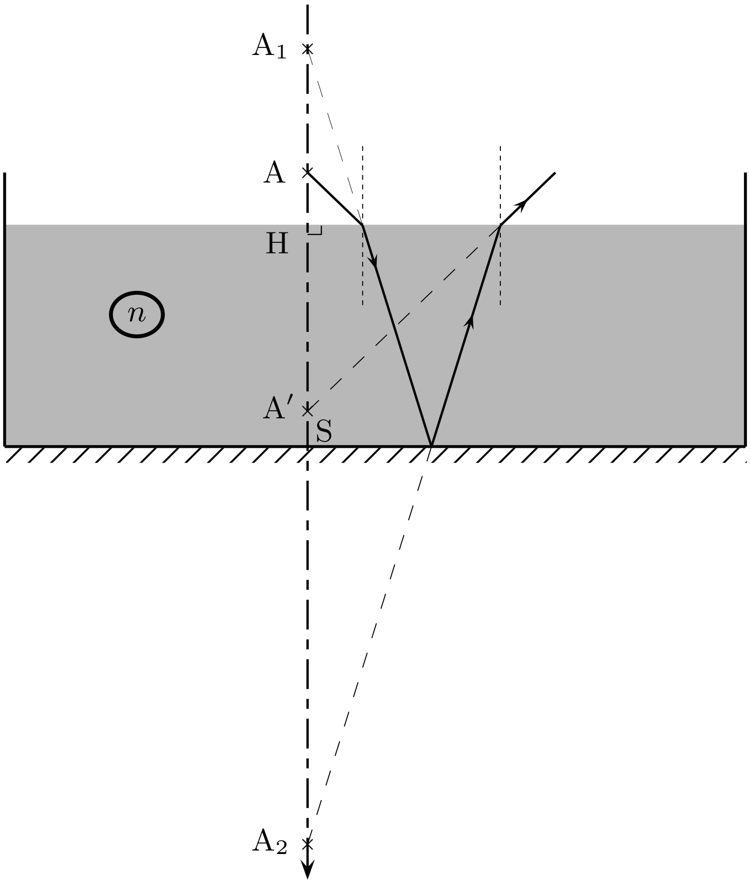
$$\overline{\text{AA}'} = \overline{\text{AH}} + \overline{\text{HH}'} + \overline{\text{H}'\text{A}'} = -\frac{\overline{\text{HA}_1}}{n} + e + \frac{\overline{\text{H}'\text{A}_1}}{n} = -\frac{\overline{\text{HA}_1}}{n} + e + \frac{\overline{\text{H}'\text{H}} + \overline{\text{HA}_1}}{n}$$

ce qui donne, puisque $\overline{\text{H}'\text{H}} = -e$:

$$\boxed{\overline{\text{AA}'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$

Notons que le décalage entre A et A′ est indépendant de la position de A : par une lame à faces parallèles, un objet quelconque donne une image simplement translatée de $e\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. De même, un rayon incident subit également un petit décalage, mais sa direction n'est pas modifiée : il ressort parallèle à lui-même.
Si l'épaisseur est faible, ces décalages sont négligeables, et l'objet est pratiquement vu comme il le serait en l'absence de lame ; c'est ce qui se produit à travers une vitre par exemple.

6) La succession d'images est la suivante : $\mathrm{A} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{A}_1 \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathrm{A}_2 \xrightarrow{-\mathcal{D}} \mathrm{A}'$ où $\mathcal{D}$ est le dioptre air-eau, $\mathcal{M}$ le miroir et $-\mathcal{D}$ le dioptre eau-air.



Par le premier dioptre, l'image A_1 vérifie :

$$\overline{\mathrm{HA}_1} = n\overline{\mathrm{HA}}.$$

Par le miroir, on sait que :

$$\overline{\mathrm{SA}_2} = -\overline{\mathrm{SA}_1}.$$

Puis, au retour par le dioptre :

$$\overline{\mathrm{HA}_2} = n\overline{\mathrm{HA}'}.$$

On en déduit :

$$\overline{\mathrm{HA}'} = \frac{\overline{\mathrm{HA}_2}}{n} = \frac{\overline{\mathrm{HS}}}{n} + \frac{\overline{\mathrm{SA}_2}}{n} = \frac{h}{n} - \frac{\overline{\mathrm{SA}_1}}{n} = \frac{h}{n} - \frac{\overline{\mathrm{SH}}}{n} - \frac{\overline{\mathrm{HA}_1}}{n} = \frac{h}{n} - \frac{\overline{\mathrm{SH}}}{n} - \overline{\mathrm{HA}}$$

d'où :

$$\boxed{\overline{\mathrm{HA}'} = d + 2\frac{h}{n}.}$$

Attention aux valeurs algébriques ici : avec l'orientation choisie pour l'axe, on doit écrire $\overline{\mathrm{SH}} = -h$ et $\overline{\mathrm{HA}} = -d$.

7) Le miroir doit être situé en S′ tel que :

$$\overline{\mathrm{AS'}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AA'}} = \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{AH}} + \overline{\mathrm{HA'}}) = \frac{1}{2}\left(d + d + 2\frac{h}{n}\right)$$

soit :

$$\boxed{\overline{\mathrm{AS'}} = d + \frac{h}{n}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'une valeur algébrique est une grandeur orientée ; l'axe optique étant le plus souvent orienté de gauche à droite, on a donc $\overline{\mathrm{OA}} < 0$ si A est à gauche de O (objet réel, ou image virtuelle).

> Rapport du jury 2009
>
> Nous notons en outre les difficultés croissantes des candidats à raisonner sous forme algébrique, que ce soit en thermodynamique, mécanique, électrocinétique, diffusion ou optique, ce qui entraîne évidemment des problèmes de signes récurrents.

♡ Il faut se souvenir que les lois de Descartes ne se restreignent pas à une relation entre indices et angles, et qu'elles précisent aussi dans quel plan se situent les rayons réfléchi et réfracté.

> Rapport du jury 2007
>
> Dans les lois de Descartes, les candidats oublient souvent de préciser que les rayons réfractés ou réfléchis sont dans le plan d'incidence.

> Rapport du jury 2008
>
> Dans les lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction, il convient de ne pas oublier que les rayons sont coplanaires.

♡ Il faut se souvenir que pour de petits angles (en pratique, jusqu'à une dizaine de degrés au moins), on peut écrire :

$$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta.$$

Attention aux AN : ces relations sont valables *uniquement* pour θ exprimé en radians.

♡ Il faut se souvenir que lorsque des dioptres interviennent dans un système optique, il est rarement nécessaire de raisonner à partir des angles et des lois de la réfraction. Il est en général nettement préférable de faire appel à la relation de conjugaison, qui tient déjà compte de ces lois pour donner directement la position de l'image.
Il est cependant intéressant de réaliser un tracé qualitatif des rayons pour visualiser approximativement la situation des images ; on utilise pour cela le fait qu'un milieu plus réfringent « rapproche » le rayon de la normale au dioptre (angle plus faible), et qu'un milieu moins réfringent l'en « éloigne » bien sûr.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on démontre la relation de conjugaison d'un dioptre plan :

∘ un tracé qualitatif définit les points objet A et image A′, leur projeté orthogonal H et le point d'incidence I, ainsi que les angles incident i et réfracté i' ;

∘ dans les triangles AIH et A′IH, on peut écrire les tangentes de ces angles ;

∘ on écrit par ailleurs la seconde loi de la réfraction, donnant une relation entre leurs sinus ;

∘ dans le cadre de l'approximation de Gauss, on peut confondre sinus et tangente, et faire ainsi le lien entre $\overline{\mathrm{HA}}$ et $\overline{\mathrm{HA'}}$.

♡ Il faut se souvenir qu'on associe souvent deux dioptres plans pour former une lame à faces parallèles ; dans ce cas, le rayon émergent est parallèle au rayon incident (cas d'une vitre, d'une lame de microscope, etc.), et le décalage entre les deux rayons est proportionnel à l'épaisseur e de la lame.

♡ Il faut se souvenir que pour une succession d'objets et d'images, on peut écrire les relations de conjugaison associées aux différents couples de conjugués intervenant, en prenant bien garde à définir clairement le centre optique utilisé dans chaque cas.

Formulaire

• La première loi de la réflexion permet d'affirmer que le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence, défini par le rayon incident et le point d'incidence I. La seconde loi précise que :

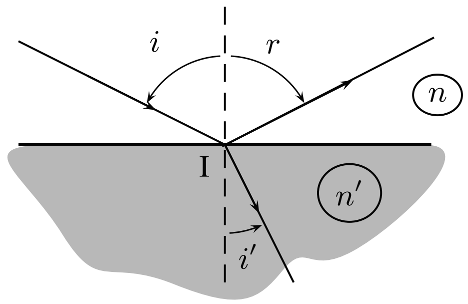
$$r = -i.$$

> Rapport du jury 2010
>
> La première loi de la réflexion (le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence) est systématiquement oubliée.

La première loi de la réfraction permet d'affirmer que le rayon réfracté est également dans le plan d'incidence. La seconde loi précise que :

$$n' \sin i' = n \sin i.$$

Dans l'exemple ci-dessous $n' > n$, donc $i' < i$:



Il est important d'indiquer le sens de propagation de la lumière sur le rayon choisi, et surtout l'orientation des angles, définis à partir de la normale.

• Un système optique est dit stigmatique si tout point objet A a pour image un unique point A′, autrement dit si tout faisceau issu de ou se dirigeant vers un point