Chapitre 1

CONVOLUTION

1.1 Préliminaires sur les groupes

Tous les groupes seront implicitement supposés abéliens.

1.1.1 Groupes topologiques.

Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie telle que les applications $x \mapsto -x$ et $(x, y) \mapsto x + y$ soient continues.

Pour chaque élément a d'un groupe topologique G l'application $\tau_a : x \mapsto a + x$, appelée translation par a, est un homéomorphisme de G sur G. Si A est une partie de G et a un point de G, on notera également $a + A$ l'image $\tau_a(A)$ de A par τ_a et, plus généralement, si A et B sont deux parties de G, $A + B$ désignera l'ensemble $\{a + b\,; a \in A, b \in B\}$.

Il résulte de la continuité de $x \mapsto -x$ que tout voisinage V de 0 contient un voisinage W de 0, ouvert et symétrique (c'est-à-dire $W = -W$).

Il résulte de la continuité des translations que les voisinages de a sont exactement les $a + V$ où V est un voisinage de 0.

Il résulte de la continuité en $(0, 0)$ de $(x, y) \mapsto x + y$ que tout voisinage ouvert de 0, V, contient un voisinage ouvert de 0, W, tel que l'on ait $W + W \subset V$.

Voici quelques exemples de groupes topologiques.

1. Tout groupe abélien muni de la topologie discrète.
2. Le groupe additif $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle.
3. Les groupes $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{C}^*$ munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$.
4. Le groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ isomorphe et homéomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, ainsi que ses puissances.
5. Le groupe additif $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$.

Les trois premiers exemples sont des groupes localement compacts, non compacts ; $\mathbb{T}^n$ est compact.

1.1.2 Action des translations sur les fonctions et les mesures.

Soit a un élément d'un groupe G. Si f est une fonction définie sur G, la translatée de f par a est la fonction $\tau_a f$ définie sur G par la formule $\tau_a f(x) = f(x-a)$.

Dans le cas particulier où l'on prend pour f la fonction indicatrice (caractéristique) $\mathbf{1}_A$ d'une partie A de G on a $\tau_a \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{a+A} = \mathbf{1}_{\tau_a(A)}$.

Si a est un élément d'un groupe topologique G et si μ est une mesure sur la tribu de Borel de G, la translatée de μ par a est la mesure $\tau_a\mu$ définie sur la tribu de Borel de G par la formule $(\tau_a\mu)(A) = \mu(A-a)$ (ceci est légitime car chaque translation, étant un homéomorphisme, transforme un ensemble borélien en un ensemble borélien). En d'autres termes $\tau_a\mu$ est l'image de μ par l'homéomorphisme τ_{-a}. On a $\int f \,\mathrm{d}(\tau_a\mu) = \int (\tau_{-a}f)\,\mathrm{d}\mu$ dans chacun des cas suivants :

1. la mesure μ et la fonction borélienne f sont positives,
2. f est intégrable par rapport à la mesure positive μ.

Mesures de Borel, mesures de Radon

Si X est un espace topologique localement compact, une *mesure de Radon* positive est une forme linéaire L sur $\mathscr{K}(X)$, l'espace des fonctions numériques continues, à support compact dans X, à valeurs positives sur les fonctions positives.

Nous dirons qu'une mesure positive μ sur la tribu de Borel $\mathscr{B}(X)$ de X est une *mesure de Borel* si, pour toute partie compacte K de X, $\mu(K)$ est fini. Clairement, si μ est une mesure positive de Borel, l'application $\varphi \mapsto \int \varphi\,\mathrm{d}\mu$ est une mesure de Radon sur X.

Exercice 1.1. Soit X un ensemble non dénombrable muni de la topologie discrète. Vérifier que la fonction μ ainsi définie sur l'ensemble des parties de X,

$$\mu(A) = 0 \quad \text{si } A \text{ est dénombrable}, \quad \mu(A) = +\infty \quad \text{sinon},$$

est une mesure de Borel. Quelle est la mesure de Radon qui lui est associée ?

Une mesure de Borel est dite *régulière* si, pour toute partie borélienne A de X, on a

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K)\,;\ K \text{ compact contenu dans } X\} \\ &= \inf\{\mu(U)\,;\ U \text{ ouvert contenant } X\}\ . \end{aligned}$$

La régularité de μ entraîne la densité de $\mathscr{K}(X)$ dans tous les espaces $L^p(\mu)$, lorsque $1 \le p < \infty$.

Si l'espace topologique X possède une base dénombrable d'ouverts, toute mesure de Borel est régulière. Il en est ainsi, en particulier, lorsque $X = \mathbb{R}^n$.

Enonçons, sans démonstration, le théorème de Riesz qui relie les deux notions de mesures :

Théorème 1.2. *Si L est une mesure positive de Radon, il existe une unique mesure de Borel régulière μ telle que, pour tout $\varphi \in \mathscr{K}(X)$, on ait $L(\varphi) = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu$.*

Si L est une mesure de Radon positive sur le groupe localement compact G, sa translatée $\tau_a L$ par l'élément a de G est la mesure de Radon définie par la formule $(\tau_a L)(\varphi) = L(\tau_{-a}\varphi)$, où $\varphi \in \mathscr{K}(G)$.

1.1.3 Mesure de Haar.

A partir de maintenant nous ne considérerons plus que des groupes localement compacts, ceci à cause du résultat suivant que nous admettons.

Théorème 1.3. *Soit G un groupe abélien localement compact. Il existe sur G une mesure de Radon positive, non nulle, invariante par translation. De plus deux telles mesures sont proportionnelles.*

Une mesure dont le théorème précédent affirme l'existence est appelée mesure de Haar de G.

Si f est une fonction définie sur G on note $\check{f}$ la fonction qui à x associe $f(-x)$. Si f est dans $\mathscr{K}(G)$, $\check{f}$ y est aussi.

Proposition 1.4. *Soit L une mesure de Haar du groupe localement compact G. Pour toute fonction φ dans $\mathscr{K}(G)$ on a $L(\check{\varphi}) = L(\varphi)$.*

Démonstration. La formule $\check{L}(\varphi) = L(\check{\varphi})$ définit une mesure de Radon sur G. On a $\check{L}(\tau_a\varphi) = L\big((\tau_a\varphi)\check{}\,\big) = L(\tau_{-a}(\check{\varphi})) = L(\check{\varphi}) = \check{L}(\varphi)$. Ceci montre que la mesure $\check{L}$ est invariante par translation. Puisque la mesure L est non nulle il existe φ_0 dans $\mathscr{K}^+(G)$, l'ensemble des éléments positifs de $\mathscr{K}(G)$, tel que l'on ait $L(\varphi_0) > 0$. La mesure $\check{L}$, invariante par translation, positive et non nulle ($\check{L}(\check{\varphi}_0) > 0$) est une mesure de Haar. Il existe donc un nombre positif λ tel que l'on ait $\check{L} = \lambda L$. D'autre part, on a $\check{L}(\varphi_0 + \check{\varphi}_0) = L\big((\varphi_0 + \check{\varphi}_0)\check{}\,\big) = L(\check{\varphi}_0 + \varphi_0) \geq L(\varphi_0) > 0$, d'où l'on déduit l'égalité $\lambda = 1$, ce qui achève la démonstration.

Exemples 1.5. Voici quelques exemples de mesures de Haar :

1. la mesure de dénombrement sur un groupe discret,
2. la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$,
3. la mesure $\mathrm{d}x/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\mathrm{d}x$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

La mesure de Haar de $\mathbb{T}^n$ sera déterminée au paragraphe 1.1.4

Proposition 1.6. *Soit λ une mesure de Haar sur G et Ω un ouvert non vide. On a $\lambda(\Omega) > 0$.*

Démonstration. Soit K un compact de G. On peut recouvrir K par un nombre fini de translatés de Ω ; si $\lambda(\Omega)$ était nul on aurait donc $\lambda(K) = 0$, ce qui ne peut se produire pour tous les compacts puisque la mesure λ n'est pas nulle.

1.1.4 Mesure de Haar de $\mathbb{T}^n$.

Soit T un nombre strictement positif. Les groupes $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ sont tous isomorphes et homéomorphes. Les choix les plus courants de T sont 1 et 2π.

Soit p la projection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. C'est, par définition de la topologie quotient, une fonction continue. La formule $\lambda(A) = \int_0^T \mathbf{1}_A \circ p(x) \frac{\mathrm{d}x}{T}$, où A est un borélien quelconque de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, définit une mesure de Borel positive λ sur $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. Montrons que la mesure λ est invariante par translation :

$$\begin{aligned}
\lambda(p(a)+A) &= \int_0^T \mathbf{1}_{p(a)+A}(p(x)) \frac{\mathrm{d}x}{T} = \int_0^T \mathbf{1}_A(p(x)-p(a)) \frac{\mathrm{d}x}{T} \\
&= \int_0^T \mathbf{1}_A \circ p(x-a) \frac{\mathrm{d}x}{T} = \int_{-a}^{T-a} \mathbf{1}_A \circ p(x) \frac{\mathrm{d}x}{T} \\
&= \int_0^T \mathbf{1}_A \circ p(x) \frac{\mathrm{d}x}{T} = \lambda(A)
\end{aligned}$$

(l'avant dernière égalité résulte de ce que $\mathbf{1}_A \circ p$ est une fonction périodique de période T). La mesure λ est donc une mesure de Haar de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. La mesure $T\lambda$ est également l'image par p de la restriction de la mesure de Lebesgue à n'importe quel intervalle de longueur T.

On obtient une mesure de Haar sur $(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})^n$ en considérant la mesure produit de mesures de Haar sur chacun des facteurs.

1.1.5 Espaces $L^p(G)$.

Lorsque l'on a un groupe localement compact G on le suppose muni d'une mesure de Haar λ. Habituellement on choisit la mesure de Haar sur un groupe compact de façon que sa masse totale soit 1 et, sur un groupe discret, on choisit la mesure de dénombrement (ces deux habitudes sont en conflit dans le cas des groupes finis !). Les espaces $L^p(\lambda)$ sont le plus souvent notés $L^p(G)$. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion à craindre on utilisera les notations suivantes :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}\lambda\,, \qquad \|f\|_p = \|f\|_{L^p(G)}\,.$$

Comme on le sait, les éléments des espaces L^p sont des classes de fonctions mesurables modulo l'égalité presque partout. Occasionnellement, nous utiliserons les espaces $\mathscr{L}^p$ dont les éléments sont les fonctions mesurables dont la puissance $p^{\text{ième}}$ est intégrable.

Proposition 1.7. *Les translations sont des isométries de* $L^p(G)$, $(1 \le p \le \infty)$. *Si* p *est dans l'intervalle* $[1,\infty[$ *et* f *dans* $L^p(G)$ *on a*

$$\lim_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_{L^p(G)} = 0\,.$$

Démonstration. Le fait qu'une translation soit une isométrie de $L^p(G)$ se déduit facilement des définitions.

Soit ε un nombre strictement positif. $\mathscr{K}(G)$ étant dense dans $L^p(G)$ (car p est fini) on peut choisir φ dans $\mathscr{K}(G)$ tel que l'on ait $\|f-\varphi\|_p \le \varepsilon/3$. Soit V_0 un voisinage compact de 0. La fonction φ, continue à support compact, est uniformément continue : il existe un voisinage V de 0 tel que l'on ait $\sup_{a\in V} \|\tau_a\varphi - \varphi\|_\infty \le \frac{1}{3}\,\varepsilon\big[\lambda(V_0+$

$\operatorname{supp}\varphi)]^{-1/p}$ (ceci est possible car V_0+ support φ est compact, donc a une mesure finie). Alors si a est dans $V \cap V_0$, qui est un voisinage de 0, on a

$$\|\tau_a f - f\|_p \leq \|\tau_a(f-\varphi)\|_p + \|\tau_a\varphi - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \leq \varepsilon\,,$$

ce qui achève la démonstration.

1.2 Convolution

Soit f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un groupe localement compact G, muni de la mesure de Haar λ. Chaque fois que cela sera possible on définira $f * g(x) = \int_G f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$, la convolution de f et g au point x. Voici une façon équivalente d'écrire la formule précédente : $f * g(x) = \int_G \tau_x(\check{f})\,g\,\mathrm{d}\lambda$.

Lemme 1.8. *Soit f et g deux fonctions boréliennes de G dans $\mathbb{C}$. La fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est une fonction borélienne. Si f et g sont positives $f * g$ est une fonction borélienne de G dans $\mathbb{R}^+$ et l'on a*

$$\int f * g \,\mathrm{d}\lambda = \Big(\int f\,\mathrm{d}\lambda\Big)\Big(\int g\,\mathrm{d}\lambda\Big)\,.$$

Démonstration. La fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)\,g(y)$, composée de la fonction continue $(x,y) \mapsto (x-y,y)$ et de la fonction borélienne $(x,y) \mapsto f(x)\,g(y)$, est borélienne. La seconde partie de l'énoncé résulte de l'application du théorème de Fubini-Tonelli à l'intégrale $\iint f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y)$.

Remarque. Si f et g sont boréliennes positives, $f * g$ est une fonction semi-continue inférieurement : f et g sont limites partout de suites croissantes $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ de fonctions bornées nulles hors d'un compact ; or il résultera du théorème 1.12 que $f_n * g_n$ est une fonction continue, on conclut en remarquant que l'on a $f * g = \sup f_n * g_n$.

Proposition 1.9. *Soit f et g deux fonctions boréliennes.*

1. *Si elles sont positives on a $f * g = g * f$.*
2. *Si $|f| * |g|(x)$ est fini, alors $f * g(x)$ et $g * f(x)$ existent, sont égaux et l'on a $|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$.*

Démonstration. Par changement de variable on obtient

$$f * g(x) = \int f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int f(z)\,g(x-z)\,\mathrm{d}\lambda(z) = g * f(x)\,,$$

ceci est légitime si f et g sont positives ou bien si la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable, ce qui a lieu si $|f| * |g|(x)$ est fini.

Proposition 1.10. *$f * g(x)$ ne dépend que des classes de f et g pour l'égalité $\lambda-$presque partout.*

Démonstration. Soit f_1 et g_1 deux fonctions mesurables égales $\lambda-$presque partout à f et g respectivement. Pour tout x dans G les fonctions $\tau_x(\check{f})\cdot g$ et $\tau_x(\check{f}_1)\, g_1$ coïncident sur le complémentaire de l'ensemble $\{g \neq g_1\} \cup \big(x - \{f \neq f_1\}\big)$ qui est de mesure nulle. Les intégrales $\int \tau_x\, \check{f} \cdot g \,\mathrm{d}\lambda$ et $\int \tau_x\, \check{f}_1 \cdot g_1 \,\mathrm{d}\lambda$ existent donc simultanément et sont égales.

Cette proposition autorise, en matière de convolution, à considérer des fonctions mesurables par rapport à la tribu obtenue en complétant la tribu de Borel par rapport à λ ; en effet dans chaque classe de fonction mesurable par rapport à cette tribu, pour l'égalité $\lambda-$presque partout, il y a une fonction borélienne.

Proposition 1.11. *Si f et g sont deux fonctions mesurables et si x n'appartient pas à l'ensemble $\{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$, alors $f * g(x)$ est nul.*

Démonstration. Si x n'est pas dans $\{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$ alors, pour tout g dans G, on a $f(x-y)\, g(y) = 0$, d'où $f * g(x) = 0$.

En particulier si f et g sont chacunes nulles hors d'un compact il en est de même de $f * g$.

Théorème 1.12. *Soit $f \in L^p(G)$ et $g \in L^{p'}(G)$, $(1 \leq p \leq \infty, p^{-1} + p'^{-1} = 1)$. La convolution $f * g$, définie en tout point de G, est une fonction uniformément continue bornée et l'on a $\|f * g\|_{L^\infty(G)} \leq \|f\|_{L^p(G)}\, \|g\|_{L^{p'}(G)}$. Si, de plus, p et p' sont finis, $f * g$ appartient à $C_0(G)$, l'espace des fonctions continues sur G tendant vers 0 à l'infini.*

On rappelle qu'une fonction numérique f définie sur un espace X localement compact tend vers 0 à l'infini si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de X telle que l'on ait $|f(x)| < \varepsilon$ lorsque $x \notin K$. Evidemment, si X est compact, $C_0(X)$ n'est autre que $C(X)$.

Démonstration. Utilisons l'inégalité de Hölder :

$$|f| * |g|(x) = \int \tau_x\, |\check{f}| \cdot |g| \,\mathrm{d}\lambda \leq \|\tau_x \check{f}\|_p\, \|g\|_{p'} = \|f\|_p\, \|g\|_{p'}\,.$$

Ceci prouve (proposition 1.9, 2.) que $f * g$ est défini en tout point. On a aussi

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &= \left| \int \big(\tau_{x+h}\check{f} - \tau_x \check{f}\big)\, g \,\mathrm{d}\lambda \right| \\ &\leq \|\tau_x(\tau_h \check{f} - \check{f})\|_p\, \|g\|_{p'} = \|\tau_h f - f\|_p\, \|g\|_{p'}\,. \end{aligned}$$

Comme p et p' ne sont pas simultanément infinis on peut supposer que p est fini. On sait (proposition 1.7) qu'alors $\|\tau_h \check{f} - \check{f}\|_p$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 dans G. Cela prouve l'uniforme continuité de $f * g$.

Dans le cas où p et p' sont finis, $\mathscr{K}(G)$ est dense dans $L^p(G)$ et dans $L^{p'}(G)$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Choisissons deux fonctions φ et ψ dans $\mathscr{K}(G)$ telles que l'on ait $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$ et $\|g - \psi\|_{p'} \leq \varepsilon$. Il vient

$$\|f * g - \varphi * \psi\|_\infty \leq \|f * (g - \psi)\|_\infty + \|(f - \varphi) * \psi\|_\infty \leq \varepsilon(\|f\|_p + \|g\|_{p'} + \varepsilon)\,.$$

De la proposition 1.11 et de ce que nous venons de démontrer il résulte que $\varphi * \psi$ est dans $\mathscr{K}(G)$. La fonction $f * g$, limite uniforme d'éléments de $\mathscr{K}(G)$, est donc dans $C_0(G)$.

Théorème 1.13. *Soit $f \in L^1(G)$ et $g \in L^p(G)$. La fonction $f * g$ est définie presque partout sur G, sa classe est dans $L^p(G)$ et l'on a $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.*

Démonstration. Le cas $p = \infty$ a déjà été étudié (théorème 1.12), supposons donc que l'on a $1 \leq p < \infty$. Soit p' l'exposant conjugué à p : $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. L'inégalité de Hölder donne

$$|f| * |g|(x) \leq \left(\int |g(y)|^p \, |f(x-y)| \, \mathrm{d}\lambda(y)\right)^{1/p} \left(\int |f(x-y)| \, \mathrm{d}\lambda(y)\right)^{1/p'}$$

(la mesure utilisée est $|f(x-y)| \, \mathrm{d}\lambda(y)$), soit $(|f| * |g|)^p \leq \|f\|_1^{p-1} \, |f| * |g|^p$, d'où (par le lemme 1.8), $\int (|f| * |g|)^p \, \mathrm{d}\lambda \leq \|f\|_1^p \, \|g\|_p^p < \infty$. Ceci montre que $|f| * |g|$ est fini presque partout, donc (proposition 1.9) que $f * g$ est défini presque partout. La démonstration sera achevée lorsque l'on aura montré que la classe de $f * g$ est une classe de fonction mesurable. Si f et g sont réelles il résulte de ce qui précède que les quatre convolutions $f^{\pm} * g^{\pm}$, sont mesurables et presque partout finies, donc $f * g$ est mesurable. Si f et g sont complexes on sépare le réel de l'imaginaire et l'on conclut de même.

Corollaire 1.14. *Muni de la convolution comme produit, l'espace $L^1(G)$ est une algèbre de Banach commutative.*

Démonstration. Définissons d'abord le terme *Algèbre de Banach*. Il s'agit d'un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ muni d'une loi de composition bilinéaire associative et continue pour la norme.

Il résulte du théorème 1.13 que la convolution est une opération interne à $L^1(G)$ et que l'on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Reste à montrer l'associativité de la convolution. Soit donc f, g et h trois éléments de $L^1(G)$. On a

$$f * g(x-z) = \int f(x-z-y) \, g(y) \, \mathrm{d}\lambda(y) = \int f(x-y) \, g(y-z) \, \mathrm{d}\lambda(y) \,,$$

d'où

$$(f * g) * h(x) = \int \left(\int f(x-y) \, g(y-z) \, \mathrm{d}\lambda(y)\right) h(z) \, \mathrm{d}\lambda(z) \,.$$

Comme on a $\int (|f| * |g|) * |h| \, \mathrm{d}\lambda = \|f\|_1 \|g\|_1 \|h\|_1 < \infty$, pour presque tout x, la fonction $(y, z) \mapsto f(x-y) \, g(y-z) \, h(z)$ est $\lambda \otimes \lambda-$intégrable et, par conséquent, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$(f * g) * h(x) = \int \left(\int f(x-y) \, g(y-z) \, h(z) \, \mathrm{d}\lambda(z)\right) \mathrm{d}\lambda(y) = f * (g * h)(x) \,.$$

Exercice 1.15. Montrer qu'il y a aussi associativité dans le cas où l'une des fonctions f, g, h est dans $L^1(G)$ les deux autres étant respectivement dans $L^p(G)$ et $L^{p'}(G)$, $(p^{-1} + p'^{-1} = 1)$. Etudier aussi le cas où deux des fonctions sont dans $L^1(G)$, la troisième étant dans $L^p(G)$.

Remarque 1.16. Les théorèmes 1.12 et 1.13 n'épuisent pas les situations dans lesquelles on peut effectuer la convolution de deux fonctions f et g. On pourra montrer à titre d'exercice les résultats suivants, où $L^p_{\mathrm{loc}}(G)$ désigne l'ensemble des classes de fonctions f telles que $f\mathbf{1}_K$ appartienne à $L^p(G)$ pour tout compact K.

1. Si f est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(G)$, g dans $L^p_{\mathrm{loc}}(G)$ et si l'une des deux fonctions est nulle hors d'un compact on a $f * g \in L^p_{\mathrm{loc}}(G)$.
2. Si f est dans $L^p_{\mathrm{loc}}(G)$, g dans $L^{p'}_{\mathrm{loc}}(G)$ et si l'une des deux fonctions est nulle hors d'un compact alors $f * g$ est continue $(p^{-1} + p'^{-1} = 1)$.
3. Si f et g sont des fonctions sur $\mathbb{R}$, nulles sur $]-\infty, 0]$, si f est dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et g dans $L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $(p^{-1} + p'^{-1} = 1)$, alors $f * g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$.

Si G est discret l'algèbre $L^1(G)$ a une unité : la fonction δ valant 1 en 0 et 0 ailleurs. Si le groupe G n'est pas discret, l'algèbre $L^1(G)$ n'a pas d'unité (voir l'exercice 1.17 ci-dessous). Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ on peut immédiatement voir qu'une fonction positive f n'est pas une unité : si φ est une fonction positive, continue à support compact non vide, le support de $\varphi * f$ est différent de celui de φ.

Exercice 1.17.

1. Soit μ une mesure positive et $f \in L^1(\mu)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $\displaystyle\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \le \varepsilon$ pour tout ensemble mesurable A tel que $\mu(A) \le \eta$ (indication : écrire $\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \le \int_{A \cap \{|f| \le t\}} |f| \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f| > t\}} |f| \,\mathrm{d}\mu$).
2. On suppose que $u \in L^1(G)$ est une unité et l'on note α la borne inférieure des mesures de Haar des voisinages ouverts de 0.
   (a) On suppose que α est nul. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que $\int_U |u| \,\mathrm{d}\lambda \le 1/2$. Aboutir à une contradiction en montrant que $\mathbf{1}_V * u \ne \mathbf{1}_V$ lorsque V est un voisinage de 0 tel que $V + V \subset U$.
   (b) Si $\alpha \ne 0$, montrer que, pour tout voisinage U de 0, ouvert et relativement compact, on a $\operatorname{card} U \le \lambda(U)/\alpha$. En déduire que la topologie de G est discrète.

1.2.1 Caractères de $L^1(G)$ et de G

Définition 1.18. On appelle *caractère* d'une algèbre de Banach commutative les homomorphismes continus et non nuls de cette algèbre dans $\mathbb{C}$.

On peut montrer que tout homomorphisme d'une algèbre de Banach dans $\mathbb{C}$ est continu, si bien que l'on pourrait omettre la continuité dans la définition précédente.

Un caractère de $L^1(G)$ est d'abord une forme linéaire continue sur $L^1(G)$, il lui est donc associé de façon unique un élément h de $L^\infty(G)$ tel que la valeur de ce caractère sur l'élément f de $L^1(G)$ soit $\int fh \,\mathrm{d}\lambda$. On doit avoir de plus $\int f * g \cdot h \,\mathrm{d}\lambda = \left(\int fh \,\mathrm{d}\lambda\right)\left(\int gh \,\mathrm{d}\lambda\right)$ quels que soient f et g dans $L^1(G)$, c'est-à-dire

$$\iint f(x)\, g(y)\, h(x+y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) = \iint f(x)\, g(y)\, h(x)\, h(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \,\mathrm{d}\lambda(y)\,.$$

On en déduit que l'on a, en désignant aussi par h un représentant de la classe h, on a

$$h(x+y) = h(x)\, h(y) \quad \lambda \otimes \lambda\text{-presque partout.} \tag{1.1}$$