

# Table des matières

<b>I</b>	<b>La programmation linéaire en variables continues</b>	<b>1</b>
	<b>Présentation</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Les bases de la programmation linéaire</b>	<b>5</b>
1.1	Formulation d'un problème de programmation linéaire . . . . .	5
1.2	Applications et interprétation économique . . . . .	8
1.2.1	Applications . . . . .	8
1.2.2	Interprétation économique générale . . . . .	13
1.3	Propriétés fondamentales . . . . .	15
1.3.1	Caractérisation des solutions admissibles . . . . .	17
1.3.2	Caractérisation géométrique des solutions optimales . . . . .	18
1.3.3	Caractérisation algébrique des sommets de $\mathcal{D}$ . . . . .	22
<b>2</b>	<b>L'algorithme simplexe</b>	<b>29</b>
2.1	Forme équivalente et tableau simplexe . . . . .	30
2.2	Propriétés fondamentales de l'algorithme simplexe . . . . .	32
2.2.1	Propriétés . . . . .	32
2.2.2	Interprétation géométrique . . . . .	35
2.3	Changement de base . . . . .	37
2.4	Algorithme simplexe . . . . .	39
2.4.1	Convergence de l'algorithme simplexe . . . . .	39
2.4.2	Algorithme simplexe (phase II) . . . . .	39
2.5	Méthode des variables artificielles . . . . .	44
2.5.1	Principe . . . . .	44
2.5.2	Définition du problème $P^a$ . . . . .	45

2.6	Dégénérescence – Cyclage . . . . .	52
2.6.1	Importance . . . . .	52
2.6.2	Interprétation géométrique . . . . .	52
2.6.3	Traitement . . . . .	55
2.7	La forme révisée de l’algorithme simplexe . . . . .	56
2.7.1	Objectif et principe de l’algorithme révisé . . . . .	56
2.7.2	Construction du tableau simplexe . . . . .	58
2.7.3	Forme produit de l’inverse de la base . . . . .	60
2.7.4	Avantages de la forme révisée . . . . .	61
2.8	Compléments à l’algorithme simplexe . . . . .	64
2.8.1	Détermination de toutes les solutions optimales . . . . .	64
2.8.2	Interprétation économique du tableau simplexe . . . . .	66
2.8.3	Traitement des problèmes à variables bornées . . . . .	68
2.8.4	Analyse de sensibilité et analyse paramétrique du vecteur $c$ . . . . .	69
<b>3</b>	<b>La dualité</b> . . . . .	<b>71</b>
3.1	Définition du problème dual . . . . .	71
3.2	Propriétés de la dualité . . . . .	73
3.3	Interprétation économique de la dualité . . . . .	81
3.3.1	Terminologie générale . . . . .	81
3.3.2	Applications . . . . .	84
3.4	Solution duale associée à une base . . . . .	86
3.4.1	Définition d’une solution duale associée à une base . . . . .	86
3.4.2	Principe de l’algorithme dual . . . . .	90
<b>4</b>	<b>L’algorithme dual simplexe</b> . . . . .	<b>95</b>
4.1	La phase II de l’algorithme dual . . . . .	96
4.1.1	Raisonnement de l’algorithme dual . . . . .	96
4.1.2	Algorithme dual (phase II) . . . . .	98
4.2	Méthode de la contrainte artificielle . . . . .	102
4.3	Compléments à l’algorithme dual . . . . .	106
4.3.1	Dégénérescence du problème dual . . . . .	106
4.3.2	Forme révisée . . . . .	107
4.3.3	Traitement des variables bornées supérieurement . . . . .	107

4.3.4	Post-optimisation suite à l'ajout d'une contrainte . . . . .	110
4.3.5	Analyse de sensibilité et analyse paramétrique du vecteur $d$ . . . . .	111
<b>5</b>	<b>L'algorithme primal-dual</b>	<b>113</b>
5.1	Principe de l'algorithme primal-dual . . . . .	113
5.1.1	Définition du problème primal restreint . . . . .	114
5.1.2	Analyse du problème restreint . . . . .	114
5.2	Le problème d'affectation . . . . .	115
5.2.1	Définition . . . . .	115
5.2.2	L'approche primale-duale appliquée au problème d'affectation . . . . .	119
5.3	Le problème de transport . . . . .	125
5.3.1	Définition . . . . .	125
5.3.2	L'approche primale-duale appliquée au problème de transport . . . . .	127
<b>6</b>	<b>L'algorithme de Dantzig et Wolfe</b>	<b>131</b>
6.1	Le principe de génération de colonnes . . . . .	131
6.2	Définition du problème maître . . . . .	134
6.3	Résolution du problème maître . . . . .	135
6.3.1	Algorithme générateur . . . . .	135
6.3.2	Application de la forme révisée . . . . .	137
6.3.3	Synthèse de l'algorithme . . . . .	138
6.3.4	Mise en œuvre . . . . .	138
	<b>Exercices et modélisations Partie I</b>	<b>141</b>
<b>II</b>	<b>La programmation linéaire en variables entières</b>	<b>157</b>
	<b>Présentation</b>	<b>159</b>
<b>7</b>	<b>Introduction à la P.L. en variables entières</b>	<b>161</b>
7.1	Formulation des problèmes . . . . .	161
7.2	Complexité . . . . .	165
7.3	La Dualité . . . . .	167

7.4	La théorie polyédrale . . . . .	168
7.5	Matrices totalement unimodulaires . . . . .	173
<b>8</b>	<b>Théorie polyédrale et méthodes de coupure</b>	<b>175</b>
8.1	Inégalités valides . . . . .	175
8.2	Construction générale d'une inégalité valide . . . . .	177
8.3	Obtention d'inégalités valides . . . . .	179
8.4	Efficacité et redondance d'une inégalité valide . . . . .	181
8.5	La méthode de coupure de Gomory . . . . .	183
8.5.1	Principe . . . . .	183
8.5.2	Algorithme de Gomory pour un problème (ILP) . . . . .	183
8.5.3	Algorithme de Gomory pour un problème (MILP) . . . . .	188
<b>9</b>	<b>Branch and Bound</b>	<b>191</b>
9.1	Principe . . . . .	191
9.2	Éléments constitutifs . . . . .	193
9.2.1	La procédure de séparation . . . . .	193
9.2.2	La procédure d'évaluation . . . . .	194
9.2.3	La procédure de cheminement . . . . .	198
9.3	$\mathcal{B}$ & $\mathcal{B}$ pour la P.L. en variables entières . . . . .	201
9.3.1	Procédure d'évaluation et de sondage . . . . .	202
9.3.2	Procédure de séparation . . . . .	202
9.3.3	Procédure de cheminement . . . . .	204
9.4	Mise en œuvre d'une méthode $\mathcal{B}$ & $\mathcal{B}$ . . . . .	210
9.4.1	Initialisation . . . . .	210
9.4.2	Branch and Cut . . . . .	213
9.4.3	La relaxation lagrangienne . . . . .	213
9.4.4	Branch and Price . . . . .	219
	<b>Exercices et modélisations de la partie II</b>	<b>223</b>

<b>III L'optimisation combinatoire</b>	<b>239</b>
<b>Présentation</b>	<b>241</b>
<b>10 Le problème de chargement</b>	<b>243</b>
10.1 Introduction . . . . .	243
10.1.1 La version de base du problème de chargement . . . . .	243
10.1.2 Les extensions du problème de chargement (KP) . . . . .	244
10.2 Un algorithme Branch and Bound . . . . .	247
10.2.1 Bornes supérieures de $\tilde{z}$ . . . . .	247
10.2.2 Bornes inférieures de $\tilde{z}$ . . . . .	249
10.2.3 Réduction initiale du problème . . . . .	250
10.2.4 Structure de l'algorithme Branch and Bound . . . . .	251
10.3 Inégalités valides et "problème cœur" . . . . .	253
10.3.1 Inégalités valides pour le problème KP . . . . .	253
10.3.2 Le problème coeur . . . . .	257
10.4 Un algorithme de programmation dynamique . . . . .	259
10.5 Performance des algorithmes . . . . .	260
10.6 Le problème en variables entières (IKP) . . . . .	262
10.6.1 Généralisation de l'approche Branch and Bound . . . . .	262
10.6.2 Programmation dynamique pour le problème (IKP) . . . . .	263
<b>11 Le problème du voyageur de commerce</b>	<b>267</b>
11.1 Introduction . . . . .	267
11.2 Formulations du problème TSP . . . . .	269
11.3 Branch and Bound pour le problème ATSP . . . . .	273
11.3.1 Les relaxations de base . . . . .	273
11.3.2 Un algorithme Branch and Bound . . . . .	275
11.4 Branch and Bound pour le problème STSP . . . . .	281
11.4.1 Les relaxations de base . . . . .	281
11.4.2 Un algorithme Branch and Bound pour le STSP . . . . .	285
11.5 Théorie polyédrale pour le STSP et Branch and Cut . . . . .	287
11.5.1 Propriétés élémentaires . . . . .	287
11.5.2 2M-inégalités ("2 matching" inequalities) . . . . .	288
11.5.3 C-inégalités ou inégalités peignes ("comb inequalities") . . . . .	289

11.5.4	GC- <i>in</i> égalités ou <i>in</i> egalit�es peignes généralisées (“generalized comb inequalities”)	290
11.5.5	“Branch and Cut” pour le problème STSP	292
11.6	Les logiciels TSP	294
<b>12</b>	<b>Le problème de couverture</b>	<b>297</b>
12.1	Introduction	297
12.1.1	Définition et formulation	297
12.1.2	Applications	299
12.1.3	Réduction d’un problème (SCP)	300
12.2	Heuristiques	302
12.2.1	Heuristiques primales	302
12.2.2	Heuristiques duales	304
12.3	Méthodes exactes	311
<b>13</b>	<b>Les problèmes de tournées de véhicules</b>	<b>313</b>
13.1	Introduction	313
13.1.1	Une classe de problèmes	313
13.1.2	Définition des problèmes de base CVRP et DCVRP	314
13.1.3	Une grande variété de situations	315
13.1.4	Des variantes classiques du problème VRP	316
13.2	Formulations mathématiques	319
13.2.1	Modèle avec des variables à deux indices	319
13.2.2	Modèle avec des variables à trois indices	321
13.2.3	Modèle avec partitionnement	324
13.3	Méthodes exactes de résolution	326
13.3.1	Branch and Bound	327
13.3.2	Branch and Cut	328
13.3.3	Branch and Price	329
13.4	Heuristiques	330
13.4.1	Heuristiques de construction	331
13.4.2	Heuristiques de recherche locale	335
<b>14</b>	<b>Les problèmes de localisation</b>	<b>337</b>
14.1	Introduction	337
14.2	Modèles et formulations	337

14.2.1	Le problème de localisation sans capacité (UFLP)	337
14.2.2	Le problème de localisation avec capacité (CFLP)	340
14.2.3	Le problème des $p$ médians (p-MP)	340
14.2.4	Le problèmes des $p$ centres (p-CP)	341
14.3	Résolution du problème UFLP	342
14.3.1	Heuristiques	342
14.3.2	La méthode DUALOC	343
14.3.3	Une méthode basée sur la relaxation lagrangienne	346
14.4	Résolution du problème des $p$ centres	347
14.4.1	Propriétés	347
14.4.2	Algorithme pour le problème (p-ACP)	349
14.4.3	Algorithme pour le problème ( $\lambda^{-1}$ -ACP)	354
<b>Exercices et modélisations Partie III</b>		<b>355</b>
<b>IV Les heuristiques et métaheuristiques</b>		<b>367</b>
<b>Présentation</b>		<b>369</b>
<b>15 Les heuristiques</b>		<b>373</b>
15.1	Adaptation de méthodes exactes	373
15.1.1	Utilisation d'une méthode Branch and Bound	373
15.1.2	Utilisation d'une méthode exacte pour construire une heuristique	373
15.2	Les heuristiques gloutonnes	376
15.3	Les heuristiques de construction	377
15.4	Les heuristiques de recherche locale	378
15.5	Garantie de performance d'une heuristique	382
<b>16 Les métaheuristiques de recherche locale</b>		<b>385</b>
16.1	Le recuit simulé ("simulated annealing")	386
16.1.1	Le principe de fonctionnement	386
16.1.2	Implémentation	390
16.2	La recherche Tabou ("Tabu Search")	392
16.2.1	Le principe de fonctionnement	392
16.2.2	Implémentation	395

16.3	Autres métaheuristiques et hybridation . . . . .	396
16.3.1	La métaheuristique GRASP . . . . .	397
16.3.2	La métaheuristique VNS . . . . .	398
16.3.3	Métaheuristiques hybrides . . . . .	399
<b>17</b>	<b>Les métaheuristiques évolutionnaires</b>	<b>401</b>
17.1	L'algorithme génétique . . . . .	401
17.1.1	Le principe d'un AG . . . . .	402
17.1.2	Mise en oeuvre d'un AG . . . . .	404
17.1.3	A propos de l'implémentation . . . . .	411
17.2	L'algorithme de la colonie de fourmis . . . . .	412
17.2.1	Le comportement des fourmis . . . . .	412
17.2.2	Le principe . . . . .	414
17.2.3	Implémentation . . . . .	415
	<b>Applications</b>	<b>417</b>
<b>V</b>	<b>La programmation dynamique</b>	<b>435</b>
	<b>Présentation</b>	<b>437</b>
<b>18</b>	<b>La programmation dynamique</b>	<b>439</b>
18.1	Modèle, notations et hypothèses . . . . .	439
18.2	Principe d'optimalité de Bellman . . . . .	442
18.3	Algorithmes de programmation dynamique . . . . .	444
18.3.1	Algorithme prospectif . . . . .	445
18.3.2	Algorithme rétrospectif . . . . .	446
18.4	Programmation dynamique en variables discrètes . . . . .	449
18.4.1	Fonctions de récurrence discrètes . . . . .	449
18.4.2	Problèmes d'allocation ou d'investissement . . . . .	451
18.5	La programmation dynamique en avenir aléatoire . . . . .	454
18.5.1	Le modèle . . . . .	454
18.5.2	Principe d'optimalité de Bellman et algorithme . . . . .	455
	<b>Exercices et Applications Partie V</b>	<b>459</b>



<b>VI</b>	<b>La théorie des graphes</b>	<b>469</b>
	<b>Présentation</b>	<b>471</b>
<b>19</b>	<b>Définitions, concepts et vocabulaire</b>	<b>473</b>
19.1	Concepts de base d'un graphe orienté . . . . .	473
19.2	Concepts de base d'un graphe non orienté . . . . .	476
19.3	Graphes particuliers . . . . .	477
19.4	Représentation d'un graphe . . . . .	482
19.5	Exploration d'un graphe . . . . .	484
19.5.1	Fermeture transitive ; composantes fortement connexes . . . . .	485
19.5.2	Parcours d'un graphe . . . . .	487
<b>20</b>	<b>Chemins et arbres optimaux</b>	<b>489</b>
20.1	Chemins optimaux . . . . .	489
20.1.1	Chemins optimaux entre un sommet et tous les autres . . . . .	489
20.1.2	Chemins optimaux entre tout couple de sommets . . . . .	494
20.2	Arbres optimaux . . . . .	496
20.2.1	Propriétés des arbres . . . . .	496
20.2.2	Arbre partiel de valeur minimale . . . . .	497
20.3	Arborescence partielle de valeur minimale . . . . .	500
<b>21</b>	<b>Flots optimaux dans un réseau de transport</b>	<b>505</b>
21.1	Définitions et propriétés . . . . .	505
21.2	Problème du flot maximum . . . . .	510
21.3	Problème du flot maximum de coût minimum . . . . .	513
21.4	Extension au cas d'un réseau $R(X, U, C, B)$ . . . . .	518
21.4.1	Compatibilité d'un flot . . . . .	518
21.4.2	Flot compatible de coût minimum . . . . .	522
21.5	Couplage maximum et transversal minimum . . . . .	522
<b>22</b>	<b>Problèmes particuliers</b>	<b>527</b>
22.1	Problème de coloration . . . . .	527
22.1.1	Bornes inférieures de $\gamma(G)$ . . . . .	528
22.1.2	Heuristique de résolution . . . . .	530
22.1.3	Problème de coloration des arêtes d'un graphe . . . . .	532

22.2	Graphes planaires . . . . .	534
22.3	Graphes parfaits . . . . .	536
22.4	Parcours eulériens et hamiltoniens . . . . .	537
22.4.1	Cycles et chaînes eulériens . . . . .	537
22.4.2	Chemins et circuits hamiltoniens . . . . .	539
<b>Exercices et modélisations Partie VI</b>		<b>541</b>
<b>A Rappels d'algèbre linéaire</b>		<b>557</b>
A.1	Espace vectoriel . . . . .	557
A.2	Rang d'une matrice . . . . .	558
A.3	Systèmes d'équations . . . . .	558
A.4	Polyèdres convexes . . . . .	559
<b>B La théorie de la complexité des algorithmes</b>		<b>563</b>
B.1	Introduction . . . . .	563
B.2	Problèmes de décision . . . . .	565
B.2.1	Définition . . . . .	565
B.2.2	Langage associé à un problème de décision . . . . .	566
B.3	Algorithme déterministe et classe $\mathcal{P}$ . . . . .	567
B.3.1	Définition d'un algorithme déterministe . . . . .	567
B.3.2	Temps d'exécution d'un algorithme déterministe . . . . .	568
B.3.3	La classe $\mathcal{P}$ des problèmes de décision . . . . .	569
B.4	Algorithme non déterministe et classe $\mathcal{NP}$ . . . . .	569
B.4.1	Définition d'un algorithme non déterministe . . . . .	569
B.4.2	Temps d'exécution d'un algorithme non déterministe . . . . .	570
B.4.3	La classe $\mathcal{NP}$ . . . . .	570
B.5	La classe des problèmes $\mathcal{NP}$ -complets . . . . .	571
B.5.1	Définitions . . . . .	571
B.5.2	La grande conjecture de la complexité des algorithmes . . . . .	573
B.5.3	Algorithme en temps pseudo-polynomial et problème $\mathcal{NP}$ -complet au sens fort . . . . .	574
B.6	Extension aux problèmes d'optimisation . . . . .	574

<b>Bibliographie</b>	<b>577</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>585</b>
<b>Liste des définitions</b>	<b>591</b>
<b>Liste des théorèmes</b>	<b>595</b>
<b>Liste des illustrations</b>	<b>597</b>
<b>Index</b>	<b>599</b>