Chapitre 1. Cours

Objectifs pédagogiques

- Déterminer le centre d'inertie d'un solide par le calcul intégral
- Déterminer le centre d'inertie d'un solide en utilisant les théorèmes de Guldin
- Déterminer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
- Définir l'opérateur d'inertie d'un solide
- Déterminer la matrice d'inertie d'un solide en utilisant la symétrie matérielle
- Savoir appliquer le théorème de Koenig

Notions abordées

- Centre d'inertie d'un système continu
- Centre d'inertie d'un système discret
- Centre d'inertie d'un système composé
- Propriété de symétrie
- Premier théorème de Guldin
- Deuxième théorème de Guldin
- Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
- Opérateur d'inertie
- Matrice d'inertie
- Base principale d'inertie
- Symétrie matérielle
- Symétrie planaire
- Symétrie de révolution
- Symétrie sphérique
- Théorème de Huygens
- Théorème de Huygens généralisé - Théorème de Koenig
- Changement de base - Matrice de passage
- Quadrique d'inertie
- Ellipsoïde d'inertie
- Matrice d'inertie d'un système matériel composé

Pour aller plus loin dans la description et la compréhension du mouvement des systèmes matériels, il est indispensable de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. C'est essentiellement :

- la localisation du centre d'inertie.
- la détermination des moments d'inertie et produits d'inertie par rapport à des axes (matrice d'inertie).

Nous nous proposons donc d'étudier la répartition géométrique des masses dans un système matériel afin de préparer les concepts cinétiques et dynamiques.

1. Centre d'inertie

1.1. Système continu

1.1.1. Définition

Soit (Σ) un système continu, c'est-à-dire un système dont la masse est répartie de façon continue, alors on appelle centre d'inertie (ou centre de masse) de (Σ) le point unique noté G tel que :

$$\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{GP}dm(P) = 0$$

où $dm(P)$ est l'élément de masse autour du point P avec $dm(P) = \rho(P)dv(P)$ pour une distribution volumique de masse, $dm(P) = \sigma(P)ds(P)$ pour une distribution surfacique de masse et $dm(P) = \lambda(P)dl(P)$ pour une distribution linéique de masse.

Il convient de préciser que $\rho(P)$ est la densité volumique, $\sigma(P)$ est la densité surfacique et $\lambda(P)$ est la densité linéique au point $P \in (\Sigma)$.

1.1.2. Coordonnées du centre d'inertie

Posons $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}$ où O désigne un point quelconque, d'après la relation ci-dessus on a :

$$\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{OP}dm = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{OG}dm$$

or $\overrightarrow{OG}$ est indépendant de m et t, donc :

$$\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{OP}dm = \overrightarrow{OG} \int_{P\in(\Sigma)} dm$$

soit :

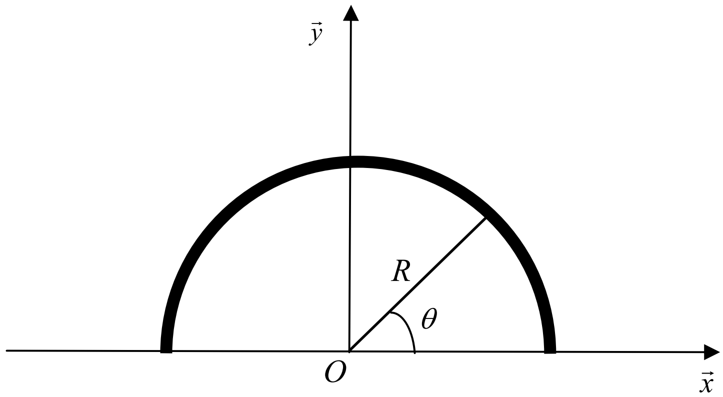
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{OP}dm$$

Si on pose $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, on a : $\overrightarrow{OG}=x_G\vec{x}_0+y_G\vec{y}_0+z_G\vec{z}_0$ et $\overrightarrow{OP}=x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0$, il vient :

$$x_G=\frac{1}{m}\int_{P\in(\Sigma)}xdm\ ;\ y_G=\frac{1}{m}\int_{P\in(\Sigma)}ydm\ \text{et}\ z_G=\frac{1}{m}\int_{P\in(\Sigma)}zdm$$

1.1.3. Application pédagogique n° 1

Déterminons le centre d'inertie d'un demi-cerceau homogène de rayon R.



En raison de la symétrie matérielle, le centre d'inertie G du demi-cerceau se trouve sur l'axe $(O,\vec{y})$:

$x_G = 0$ et $y_G=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{(S)}ydl$

en utilisant les coordonnées polaires, on peut écrire :

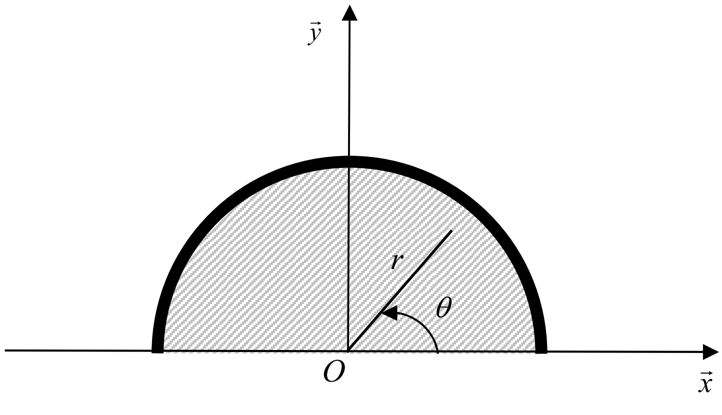
$dl=Rd\theta, y=R\sin\theta\ et\ L=\pi R$

alors :

$$y_G=\frac{R^2}{L}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{2R}{\pi}$$

1.1.4. Application pédagogique n° 2

Soit (D) un demi-disque plan homogène de centre O, de rayon R et de masse m. Calculons dans le repère $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ son centre d'inertie G.



$\forall P \in (D)$ on a z = 0 $\Leftrightarrow z_G = 0$. Par ailleurs en raison de la symétrie matérielle de (D) par rapport à l'axe $(O,\vec{y})$, le centre d'inertie G est situé sur l'axe $(O,\vec{y})$ et par conséquent $x_G = 0$. Il ne reste plus qu'à calculer y_G.

$$y_G = \frac{1}{m}\int_{P\in(D)} y dm \Leftrightarrow y_G = \frac{\sigma}{m}\int_{P\in(D)} yrdrd\theta = \frac{\sigma}{m}\int_{P\in(D)} (r\sin\theta)rdrd\theta = \frac{\sigma}{m}\int_{P\in(D)} r^2 dr \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{m}\left[\int_0^R r^2 dr\right]\left[\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right] = \frac{2\sigma R^3}{3m} \Leftrightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

1.2. Système discret

Pour un système discret (Σ) composé de points matériels P_i *(i = 1,…, n)* de masse m_i, le centre d'inertie du système (Σ) est le point G défini par :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \text{ (barycentre)}$$

où $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ est la masse totale de (Σ) .

soit quel que soit le point O :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}}{m}$$

Si (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées de $P_i \in (\Sigma)$ dans le repère $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, alors les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du centre d'inertie G de (Σ) dans (R_0) sont données par :

$$x_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \;;\; y_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \text{ et } z_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

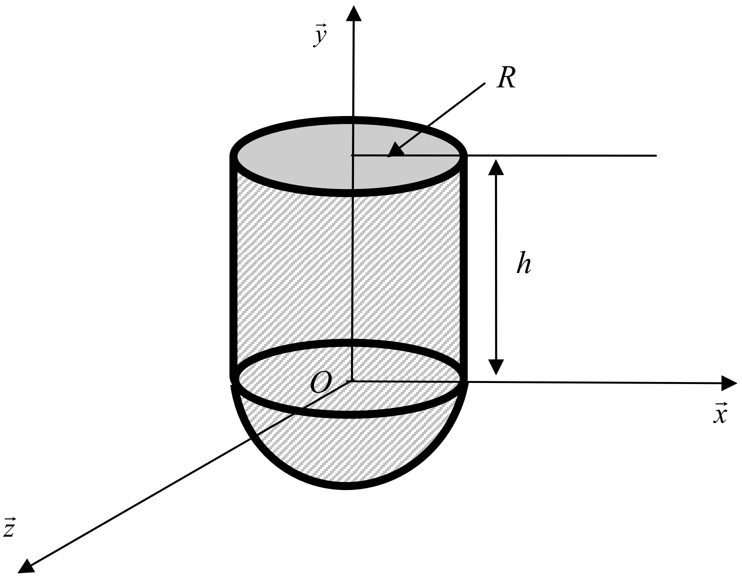
1.3. Système composé

Soit $(\Sigma) = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ un système formé de n sous-systèmes Σ_i (i= 1, …, n) deux à deux disjoints de masse m_i, alors le centre d'inertie G de (Σ) est le barycentre des centres d'inertie G_i de Σ_i affecté de la masse m_i :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OG_i}$$

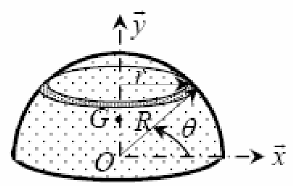
où $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ est la masse totale de (Σ).

1.3.1. Application pédagogique n° 3



Déterminer le centre d'inertie d'une demi-sphère de rayon R et de masse volumique ρ. En déduire la position du centre d'inertie d'un culbuto constitué de la demi-sphère précédente surmontée d'un cylindre de même rayon, de hauteur h et de même masse volumique. Pour quelle valeur de h, le centre d'inertie du culbuto est confondu avec le centre O de la sphère ?

– Demi-sphère de rayon R, de masse $m_1 = \dfrac{2}{3}\rho\pi R^3$



Par raison de symétrie, le centre d'inertie G se trouve sur l'axe $(O, \vec{y})$. On découpe la demi-sphère en disques élémentaires d'axe $(O, \vec{y})$, d'épaisseur dy, de rayon r et de masse :

$$dm = \rho\pi r^2 dy$$

on a : $r = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta \Rightarrow dy = R\cos\theta d\theta$

d'où :

$$m_1 y_G = \int_{(S)} y dm = \rho\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta = \frac{\rho\pi R^4}{4} \Rightarrow y_G = \frac{3R}{8}$$

– Culbuto composé d'une demi-sphère de rayon *R*, de masse $m_1 = \frac{2}{3}\rho\pi R^3$, et d'un cylindre de rayon *R*, de hauteur *h* et de masse $m_2 = \rho\pi R^2 h$.

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie *G* du culbuto se trouve sur l'axe $(O, \vec{y})$.

Soit G_1 le centre d'inertie de la sphère seule et G_2 le centre d'inertie du cylindre seul, avec :

$$y_{G_1} = -\frac{3R}{8} \text{ et } y_{G_2} = \frac{h}{2}$$

le culbuto étant composé de la sphère et du cylindre, on a :

$$y_G = \frac{m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}}{m_1 + m_2}$$

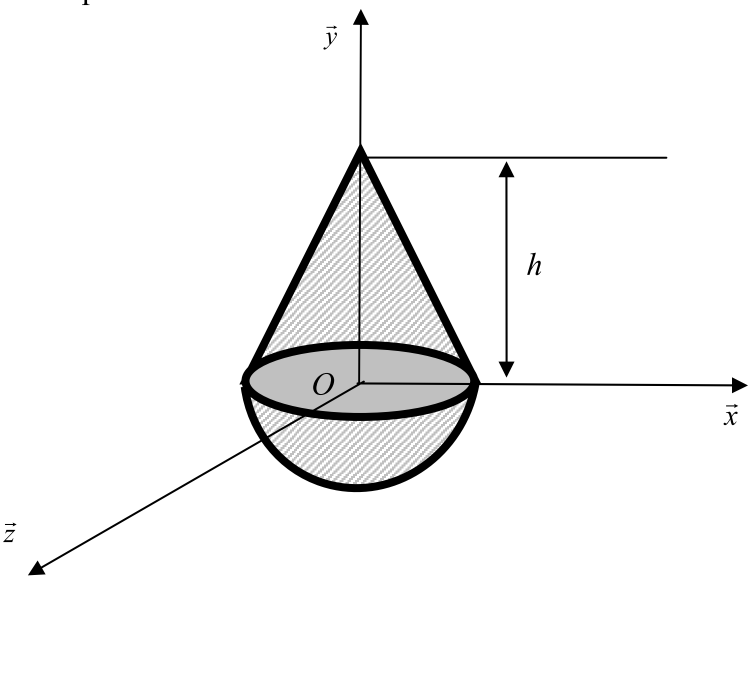
soit :

$$y_G = \frac{\frac{2}{3}\rho\pi R^3(-\frac{3}{8}R) + \rho\pi R^2 h(\frac{h}{2})}{\frac{2}{3}\rho\pi R^3 + \rho\pi R^2 h} \Rightarrow y_G = \frac{3(2h^2 - R^2)}{4(3h + 2R)}$$

Le centre d'inertie du culbuto sera confondu avec *O* pour $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

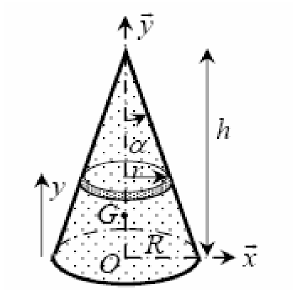
1.3.2. Application pédagogique n° 4

Déterminer le centre d'inertie d'une demi-sphère de rayon *R* et de masse volumique ρ. En déduire la position du centre d'inertie d'un culbuto constitué de la demi-sphère précédente surmontée d'un cône de même rayon, de hauteur *h* et de même masse volumique. Pour quelle valeur de *h*, le centre d'inertie du culbuto est confondu avec le centre *O* de la sphère ?



– Pour le centre d'inertie de la demi-sphère le calcul a déjà été fait (voir application pédagogique n° 3).

– Cône de base circulaire de rayon R, de hauteur h et de masse $m_2 = \rho\dfrac{\pi R^2 h}{3}$.



Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie G se trouve sur l'axe $(O, \vec{y})$. On découpe le cône en disques élémentaires d'axe $(O, \vec{y})$, d'épaisseur dy, de rayon r, situés à la hauteur y et de masse :

$$dm = \rho\pi r^2 dy$$

on a : $\dfrac{h-y}{r} = \dfrac{h}{R} \Rightarrow r = R(1-\dfrac{y}{h})$, d'où :

$$y_G = \frac{1}{m_2}\int_{P\in(S)} y\,dm = \frac{\rho\pi R^2}{m_2}\int_0^h (1-\frac{y}{h})^2 y\,dy = \frac{\rho\pi R^2 h^2}{m_2} \Rightarrow y_G = \frac{h}{4}$$

– Toupie composée d'une demi-sphère de rayon R, de masse $m_1 = \dfrac{2}{3}\rho\pi R^3$ et d'un cône de rayon R, de hauteur h et de masse $m_2 = \rho\dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie G du culbuto se trouve sur l'axe $(O, \vec{y})$. Soit G_1 le centre d'inertie de la sphère seule, et G_2 le centre d'inertie du cône seul, avec : $y_{G_1} = -\dfrac{3R}{8}$ et $y_{G_2} = \dfrac{h}{4}$.

La position du centre d'inertie de la toupie est donnée par :

$$y_G = \frac{m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}}{m_1 + m_2}$$

soit

$$y_G = \frac{\frac{2}{3}\rho\pi R^3\left(-\frac{3R}{8}\right) + \rho\frac{\pi R^2 h}{3}\left(\frac{h}{4}\right)}{\frac{2}{3}\rho\pi R^3 + \rho\frac{\pi R^2 h}{3}} \Rightarrow y_G = \frac{h^2 - 3R^2}{4(h+2R)}$$

Le centre d'inertie du culbuto sera confondu avec O pour $h = R\sqrt{3}$.

1.4. Propriété de symétrie

Si un solide homogène possède un élément (point, axe, plan) de symétrie, alors G appartient à cet élément.

1.5. Théorèmes de Guldin

Il existe deux théorèmes de Guldin et ne sont valables que dans le cas des systèmes homogènes ayant une densité linéique ou surfacique. Autrement dit si un solide a une densité volumique alors les théorèmes de Guldin ne s'appliquent pas.

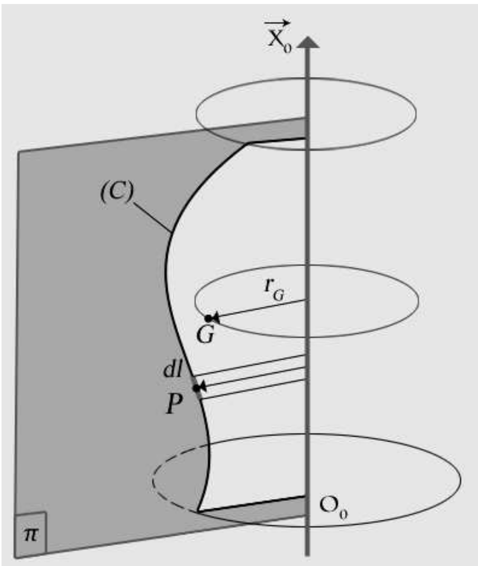
1.5.1. Premier théorème de Guldin : centre d'inertie d'une courbe plane

ce premier théorème permet la détermination du centre d'inertie d'une courbe plane homogène et porte parfois le nom de théorème de Pappus ou de théorème de Pappus-Guldin.

Énoncé

L'aire S de la surface engendrée par une courbe plane (C), de longueur L, tournant autour d'un axe de son plan (P), ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie G.

$$S = 2\pi r_G . L$$



Surface engendrée par une courbe

Démonstration

Le centre d'inertie G de la courbe (C) est donné par la relation :

$$\overrightarrow{O_0G} = \frac{1}{L} \int_{P \in (C)} \overrightarrow{OP} dl$$