Chapitre *1*

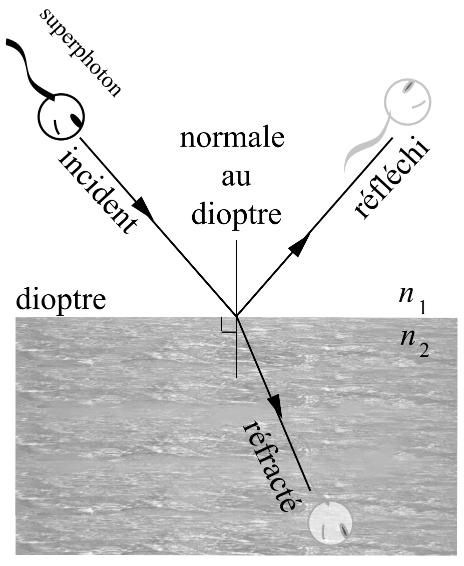
Les lois de Descartes

Rappels de cours

I Modèle de l'optique géométrique

Les rayons lumineux

Dans la plupart des « expériences »d'optique que l'on peut rencontrer dans la vie courante, on s'interesse aux « rayons lumineux », c'est-à-dire à la « trajectoire » des photons. On les représente simplement à l'aide d'un crayon et d'une règle. En réalité, la lumière possède également une nature ondulatoire dont les effets, comme la diffraction, sont négligés dans ce chapitre.



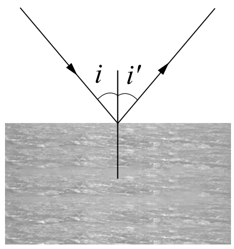
Les dioptres

Un **dioptre** est la frontière entre deux milieux d'indice différent. Un rayon frappant un dioptre est à la fois réfracté et réfléchi. L'amplitude lumineuse de chacun des rayons dépend de la longueur d'onde, de l'indice, de l'angle... Sa détermination sort du cadre de première année. Dans les exercices, on ne considérera que le rayon incident et celui qui est transmis ou réfléchi lors de la présence d'un dioptre.

Pour éviter des bourdes malheureuses, les angles utilisés en présence d'un dioptre sont mesurés par rapport à la normale au dioptre. Le rayon incident et cette normale définissent alors le **plan d'incidence**, c'est-à-dire le plan de la feuille que vous utilisez.

II Lois de Descartes

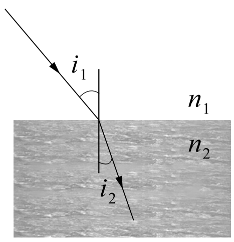
Loi de la réflexion



Lorsqu'un rayon lumineux rencontre une surface réfléchissante, le rayon est réfléchi dans ce même plan et l'angle de réflexion vérifie

$$\boxed{i = i'}$$

Loi de la réfraction

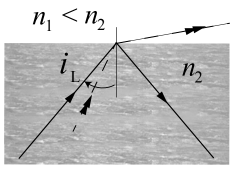


Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence et les angles des rayons incident et réfracté vérifient

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

De cette relation, on déduit que le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptre lorsqu'il arrive dans un milieu d'indice plus élevé (plus réfringent). Dans l'exemple ci-contre : on a $n_2 > n_1$.

La réfraction limite



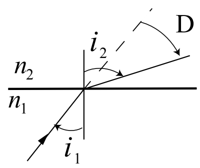
Lorsque l'on passe d'un milieu d'indice faible (milieu moins réfringent) à un milieu d'indice plus fort (milieu plus réfringent), la loi de Descartes de la réfraction n'est plus valide au delà d'un angle dit de « réfraction limite », donné par

$$\boxed{\sin i_{\mathrm{L}} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{avec} \quad n_1 < n_2}$$

1 Calculer un angle de déviation

1.1 En utilisant chaque déviation

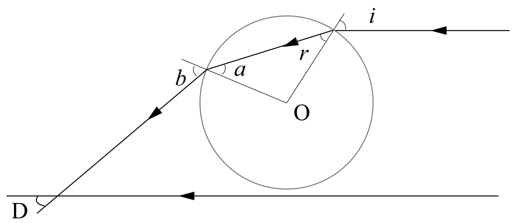
Méthode : à chaque dioptre, l'angle de déviation vaut $\mathrm{D} = i_2 - i_1$.
Sommer les déviations à chaque dioptre



Pour déterminer un angle de déviation, il est possible de sommer toutes les déviations à chaque fois que le rayon lumineux rencontre un dioptre.

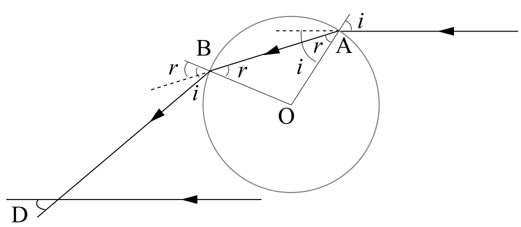
Exemple *D'après CCP 05*

On considère un rayon lumineux frappant une goutte d'eau d'indice n en formant un angle i par rapport à la normale au dioptre. L'indice de l'air sera pris égal à 1.



Déterminer les angles a et b puis l'angle de déviation D, en fonction de i et r.

Le triangle OAB étant isocèle, les angles a et r sont égaux. D'après les relations de Descartes, $\sin i = n \sin r = \sin b$. On en déduit que $b = i$. Pour l'angle D, le rayon incident tourne au premier dioptre de $i - r$ puis au second de $i - r$.



La déviation totale vaut donc

$$\mathrm{D} = 2i - 2r$$

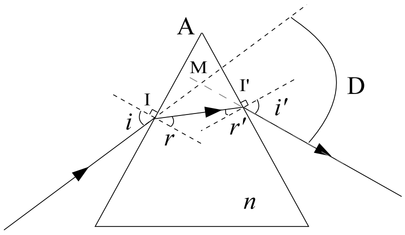
Cette méthode est, de loin, la plus rapide pour obtenir le résultat.

Pour s'entraîner : exercice 1.

1.2 En utilisant les propriétés des triangles

Méthode : on utilise la somme des angles d'un triangle (égale à π !). Identifier les angles intérieurs au triangle et utiliser la propriété précédente.

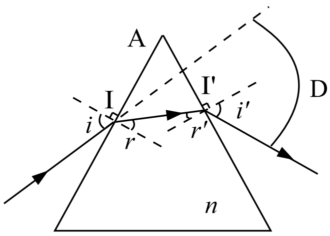
Exemple On considère un prisme d'angle au sommet A et d'indice n. Un rayon frappe le prisme avec un angle d'incidence i et ressortant par un angle i'. On note r et r' les angles de réfraction à l'intérieur du prisme.

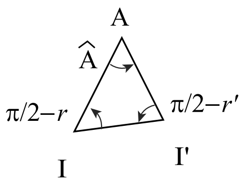


1 - Déterminer l'angle de déviation D du rayon incident en fonction de r, r', i et i'.

2 - Donner l'expression de A en fonction de r et r' et en déduire une expression de D uniquement en fonction de A, i et i'.

Notons r et r' les angles de réfraction dans le prisme.





Lors du premier dioptre, le rayon tourne de $i - r$ puis au second de $i' - r'$. L'angle de déviation vaut donc

$$\mathrm{D} = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r')$$

Dans le triangle IAI$'$ on trouve : $\pi = \mathrm{A} + \pi/2 - r + \pi/2 - r'$, soit $\mathrm{A} = r + r'$. Remplaçons les angles r et r' dans la valeur de D :

Ainsi, $$\boxed{\mathrm{D} = i + i' - \mathrm{A}}$$

Pour s'entraîner : exercices 4 et 5.

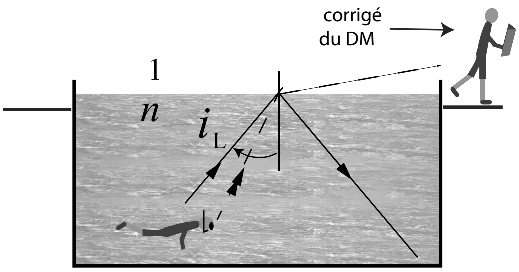
2 Déterminer un angle de réfraction limite

Méthode : identifier le milieu d'indice le plus élevé (noté n_2).
Le rayon subissant une réflexion totale est dans ce milieu.
Identifier le milieu d'indice le plus faible. (noté n_1).
L'angle de réfraction limite est alors donné par

$$\boxed{\sin i_{\mathrm{L}} = \frac{n_1}{n_2}}$$

Vérifier que $n_1/n_2 < 1$!

Exemple Le minor de votre promotion est au fond d'une piscine[1] et observe crapuleusement quelque chose à l'extérieur. L'indice de l'eau est noté $n = 1,33$, l'indice de l'air sera pris égale à 1.



Déterminer l'angle de réfraction limite pour lequel la surface de l'eau se comporte comme un miroir.

Un rayon lumineux peut être soumis à une réflexion totale s'il est issu de l'eau ($n = 1,33$) vers l'air (*indice* $= 1$). Appliquons la relation de Descartes lors de la réflexion totale :

$$n \sin i_{\mathrm{L}} = 1 \quad \text{soit} \quad \sin i_{\mathrm{L}} = 1/n$$

L'indice de l'eau étant supérieur à 1, le sinus est donc bien défini. On obtient ainsi :

Application numérique : $\boxed{i_{\mathrm{L}} = \arcsin(1/n) = 48,8°}$

Mise en garde : n'oubliez pas que souvent votre calculatrice est définie pour des angles en radians... Vérifiez régulièrement si vous ne voulez pas perdre des points de façon ridicule...

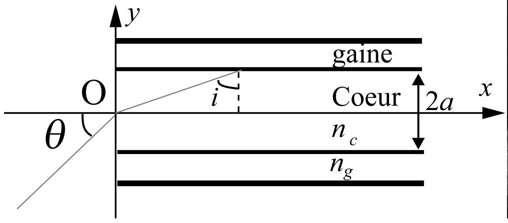
Pour s'entraîner : exercices 1, 2, 3 et 4.

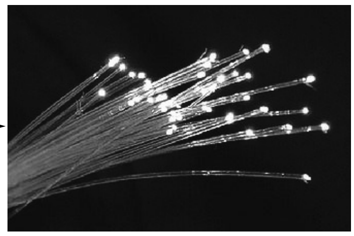
1. Et oui, au fond... il n'est pas si bête...

Exercices

Exercice 1 *D'après CCP 07*

Une fibre à saut d'indice, représentée sur la figure ci-dessous, est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe Ox, de diamètre $2a$ et d'indice n_c, entouré d'une gaine optique d'indice n_g légèrement inférieur à n_c. Un rayon situé dans le plan Oxy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ.



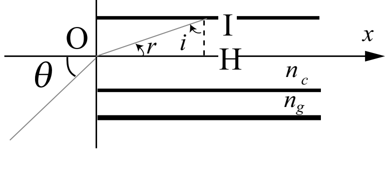


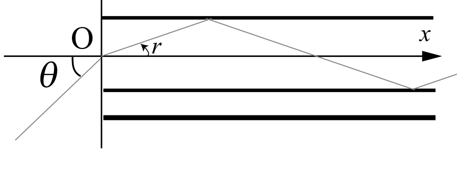
1 - À quelle condition sur i, angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ?
On note i_{L} l'angle d'incidence limite.
Faire un dessin du trajet ultérieur du rayon en faisant apparaître plusieurs réflexions.
2 - Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle d'incidence θ_{L} tel que $\sin\theta_{\mathrm{L}} = n_c \cos i_{\mathrm{L}}$.
3 - En déduire l'expression de l'ouverture numérique O.N de la fibre définie par O.N = $\sin\theta_{\mathrm{L}}$ en fonction de n_c et n_g uniquement.
4 - Donner la valeur numérique de O.N pour n_c = 1,500 et n_g = 1,470.

♣♣♣

Solution

1 - Au point I, le dioptre sépare un milieu plus réfringent (le cœur de la fibre) d'un milieu moins réfringent (la gaine). Il y a donc possibilité de réflexion totale. Plus précisément si l'angle d'incidence i est tel que $i > i_{\mathrm{L}}$ angle d'incidence limite défini par la relation $i_{\mathrm{L}} = \arcsin\left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)$, il y a réflexion totale et la lumière se propage dans le cœur de la fibre. On obtient le cheminement de la lumière suivant pour une incidence θ :





2 - Le triangle $(\mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{I})$ *est rectangle en H. La condition précédente impose sachant que* $r = \dfrac{\pi}{2} - i$ *:* $r < r_{\mathrm{L}} = \dfrac{\pi}{2} - i_{\mathrm{L}}$ *soit* $\sin r < \cos i_{\mathrm{L}}$ *car la fonction* $\sin$ *étant strictement croissante sur* $-\left]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

soit $$n_c \sin r < n_c \cos i_{\mathrm{L}}$$

En appliquant la loi de Snell-Descartes pour la réfraction au point O, on tire que :

$$\boxed{n_{air} \sin\theta < n_c \cos i_{\mathrm{L}}}$$

3 - $$\sin\theta < \frac{n_c}{n_{air}}\sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

On en conclut alors que le rayon lumineux restera confiné à l'intérieur du cœur de la fibre si $\theta < \theta_{\mathrm{L}}$ *tel que :*

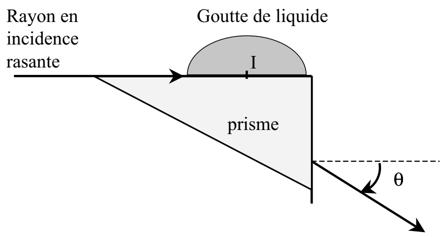
$$\boxed{\mathrm{O.N} = \sin\theta_{\mathrm{L}} = \frac{1}{n_{air}}\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$$

4 - ***Application numérique :*** $\mathrm{O.N} = \dfrac{1}{1,000}\sqrt{1,500^2 - 1,470^2} = 0,2985$

♣♣♣

Exercice 2

En viticulture, la quantité de sucre dans un raisin peut être déterminer en mesurant l'indice de réfraction d'un liquide par le principe du réfractomètre de Pulfrich. On dépose une goutte de ce liquide sur la face supérieure d'un prisme d'angle au sommet 90°. On éclaire cette goutte en lumière monochromatique en prenant bien soin qu'elle soit éclairée en **incidence rasante**. À l'aide d'un oculaire, on observe derrière l'autre face du prisme.



1 - L'indice de réfraction du verre est $\mathrm{N} = 1,625$. Dessiner la marche du rayon lumineux rasant se réfractant en I.
2 - On est capable de mesurer l'angle θ du rayon émergeant correspondant au rayon d'incidence rasante (voir figure).
Montrer que l'angle θ satisfait la relation :

$$\sin\theta = \sqrt{\mathrm{N}^2 - n^2}$$

Calculer numériquement θ.
3 - Quelle est la valeur minimale de l'indice de réfraction d'un liquide qu'on peut mesurer avec ce réfractomètre ?

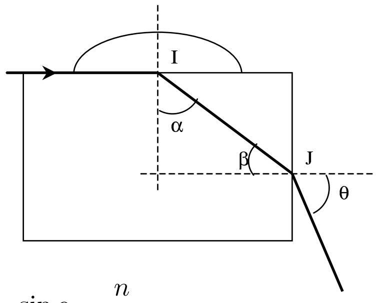
♣♣♣

Solution

1 - La configuration étudiée exige que l'eau soit un milieu moins réfringent que le verre soit $n < \mathrm{N}$.

Dans ce cas, on obtient la marche suivante :

En J, il y a passage d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent. Ainsi, le rayon réfracté, s'il existe, s'écarte de la normale au dioptre.



2 - La loi de Descartes pour la réfraction appliquée en I conduit à :

$$\mathrm{N}.\sin\alpha = n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \textit{soit} \quad \sin\alpha = \frac{n}{\mathrm{N}}$$

et

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

donc

$$\sin\beta = \cos\alpha$$

En appliquant la loi de Descartes pour la réfraction en J, on en déduit :

$$\sin\theta = \mathrm{N}.\sin\beta$$

Et comme les angles ont leurs valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

alors

$$\sin\theta = \mathrm{N}.\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \mathrm{N}.\sqrt{1-\left(\frac{n}{\mathrm{N}}\right)^2}$$

On en déduit

$$\boxed{\sin\theta = \sqrt{\mathrm{N}^2 - n^2}}$$

Application numérique :

$$\boxed{\sin\theta = 0,934}$$

3 - La loi de Descartes appliquée en J lors de la réfraction conduit à :

$$\mathrm{N}.\sin\beta \leqslant 1 \quad \textit{soit} \quad 0 \leqslant \mathrm{N}.\cos\alpha \leqslant 1$$

soit

$$\mathrm{N}^2.\left(1-\sin^2\alpha\right) \leqslant 1$$

d'où

$$\mathrm{N}^2 \leqslant 1 + \mathrm{N}^2\sin^2\alpha$$

On en déduit alors :

$$\boxed{n \geqslant \sqrt{\mathrm{N}^2 - 1}}$$

Application numérique :

$$\boxed{n \geqslant 1,28}$$

♣♣♣