COURS ET EXERCICES

1 QUE SAIS-JE SUR LES POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ ?

DÉFINITION On appelle fonction polynomiale du second degré une fonction de la forme
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.

ex. $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ est une fonction polynomiale du second degré avec $a = -1$, $b = 3$ et $c = 2$. $g(x) = x^2 - (x+1)^2$ n'est pas une fonction polynomiale du second degré. En effet, il faut écrire $g(x)$ sous forme développée pour pouvoir l'identifier. Or $g(x) = x^2 - (x^2 + 2x + 1) = -2x - 1$ ainsi g est affine.

PROPRIÉTÉ La courbe représentative d'une fonction polynomiale du second degré est une parabole de sommet $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
De plus, si $a > 0$ ce sera un minimum et si $a < 0$ ce sera un maximum.

ex. En considérant $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ on a donc comme sommet le point d'abscisse $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\times(-1)} = \frac{3}{2}$ et d'ordonnée $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\times\frac{3}{2} + 2 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 2 = \frac{17}{4}$. $a = -1 < 0$ donc ce sommet est un maximum.

PROPRIÉTÉ On appelle forme canonique du polynôme de second degré $ax^2 + bx + c$ la forme $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \beta$ où $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

ex. On a donc $f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$.

REMARQUE La forme canonique permet de retrouver plus rapidement les coordonnées du sommet de la parabole.

ex. Soit $f(x) = 3(x-2)^2 + 4$. Alors la courbe de f est une parabole ayant un minimum (car $a = 3 > 0$) atteint pour $x = 2$ qui vaut 4 (autrement dit son sommet a pour coordonnées (2;4) et c'est un minimum).

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 1.1 (6 pts) *10 min*

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions polynomiales du second degré et dans ce cas préciser les réels a, b et c.

1. $f(x) = 4x + 2 - \dfrac{x^2}{3}$

2. $g(x) = (2x+1)^2 - 4x^2$

3. $h(x) = (3x+2)(x-1)$

4. $i(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{4}$

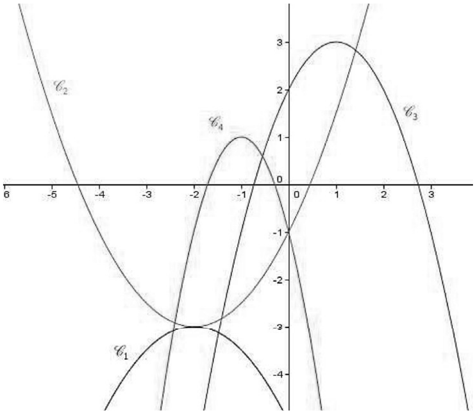
5. $j(x) = \left(\sqrt{x} + 3\right)^2$

6. $k(x) = 3 - 2x^2$

Exercice 1.2 (4 pts) *10 min*

Sans utiliser la calculatrice et en justifiant, associer chaque fonction à une courbe.

$f_1(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 3$, $f_2(x) = -(x-1)^2 + 3$, $f_3(x) = -2(x+1)^2 + 1$ et $f_4(x) = -\dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 3$



Exercice 1.3 (6 pts) *15 min*

Dans chaque cas, calculer les coordonnées du sommet et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

1. $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$

2. $g(x) = 1 - 2x^2$

3. $h(x) = \dfrac{x + x^2}{3}$

4. $h(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + 1$

2 COMMENT RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ?

DÉFINITION On appelle discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

ex. Soit (E) l'équation $4x^2 - 3x + 2 = 0$. Alors $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 2 = -23$.

REMARQUE Le discriminant est un réel lié à l'ordonnée du sommet de la parabole. En effet, on peut remarquer que le sommet a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

THÉORÈME Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.
Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'a pas de solutions.
Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Les solutions sont appelées les racines de la fonction polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ainsi pour résoudre une équation du second degré, on calcule Δ et on détermine le nombre de solutions en fonction du signe de Δ.

ex. $(E): 4x^2 - 3x + 2 = 0$

Pour résoudre l'équation $4x^2 - 3x + 2 = 0$ on a calculé $\Delta = -23 < 0$. L'équation n'admet pas de solutions : $S = \varnothing$. Autrement dit, il n'existe aucun réel tel que $4x^2 - 3x + 2 = 0$.
Soit $(E'): x^2 - 3x + 2 = 0$ alors $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$. Il y a deux solutions $x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$ et $x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1$. Ainsi $S = \{1; 2\}$.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 2.1 (10 pts) *25 min*

Dans chaque cas, résoudre l'équation :

1. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

2. $2x^2 - 4x + 1 = 0$

3. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

4. $-x^2 + 3x + 2 = 0$

5. $\dfrac{x^2 + 4x - 1}{3} = 0$

Exercice 2.2 (4 pts) *10 min*

Dans chaque cas, dire si le réel a est racine du polynôme $P(x)$:

1. $P(x) = x^2 + 2x + 1$ et $a = -1$

2. $P(x) = x^2 + 4x - 2$ et $a = 2$

3. $P(x) = x^2 + 4x - 1$ et $a = 0$

4. $P(x) = x^2 - x - 12$ et $a = 4$

Exercice 2.3 (12 pts) *30 min*

Dans chaque cas, résoudre l'équation de deux manières différentes : l'une utilisant le discriminant et l'autre utilisant une factorisation.

1. $x^2 - 3x = 0$

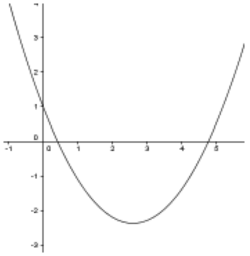
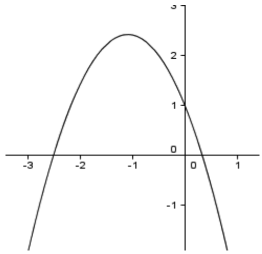
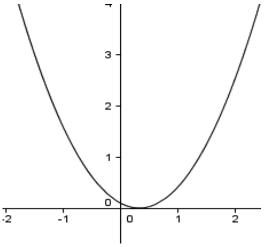
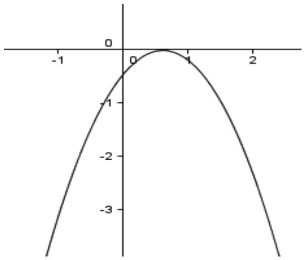
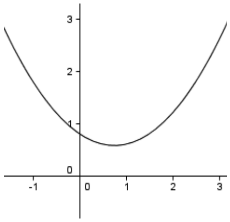
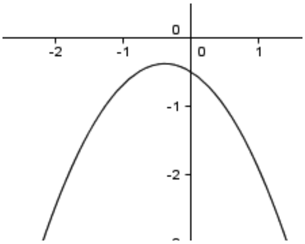
2. $(x-1)^2 - 9 = 0$

3. $3x^2 + 48 = 0$

4. $2x^2 - 12x + 18 = 0$

3 QUELLE INTERPRÉTATION GRAPHIQUE DE LA RÉSOLUTION ?

Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole de la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ et de l'axe des abscisses. Ainsi par simple observation graphique, on peut déterminer le nombre de solutions de l'équation et par conséquent le signe de Δ. Puis en observant l'allure de la courbe, on peut connaître le signe de a.

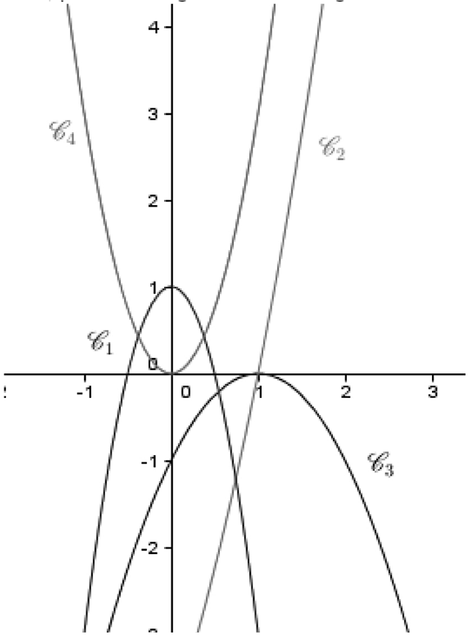
	$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$		
$\Delta=0$		
$\Delta<0$		

Une autre utilisation peut être le contrôle de ses résultats : en effet après avoir résolu une équation de type $ax^2+bx+c=0$, on peut faire afficher la courbe de la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ sur la calculatrice et contrôler le nombre de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 3.1 (4 pts) *10 min*

Pour chaque courbe, préciser le signe de Δ et le signe de a.



Exercice 3.2 (16 pts) *40 min*

Dans chaque cas, résoudre l'équation et faire afficher la courbe de la fonction polynomiale correspondante afin de contrôler vos calculs.

1. $2x^2 + 2x - 4 = 0$

2. $3x^2 - 12 = 0$

3. $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$

4. $-3x^2 + 4x - 1 = 0$

5. $-x^2 + 3x + 1 = 0$

6. $4x - 3x^2 + 2 = 0$

7. $6 - 2x^2 = 0$

8. $4x + 3x^2 = 0$

4 COMMENT FACTORISER UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ ?

Développons l'expression $3(x-1)(x+2)$.

$3(x-1)(x+2)=3(x^2+2x-x-2)=3(x^2+x-2)=3x^2+3x-6$

Cette expression est donc la forme factorisée d'un polynôme du second degré. De manière générale, on peut utiliser le calcul des racines pour pouvoir factoriser à l'aide du théorème suivant.

THÉORÈME Soit $f(x)=ax^2+bx+c (a\neq 0)$ un polynôme du second degré. Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant associé.
Si $\Delta<0$ alors $f(x)$ n'est pas factorisable.
Si $\Delta=0$ alors f admet une unique racine $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ et la forme factorisée de $f(x)$ est $a(x-x_0)^2$.
Si $\Delta>0$ alors f admet deux racines $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et la forme factorisée de f est $a(x-x_1)(x-x_2)$.

ex. Soit $f(x)=-2x^2+3x+2$ alors $\Delta=3^2-4\times(-2)\times 2=25>0$.

$x_1=\dfrac{-3-5}{2\times(-2)}=2$ et $x_2=\dfrac{-3+5}{2\times(-2)}=-\dfrac{1}{2}$. Alors on peut factoriser f par

$f(x)=-2(x-2)\left(x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)=-2(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

Soit $g(x)=4x^2+4x+1$ alors $\Delta=4^2-4\times 4\times 1=0$ donc $x_0=\dfrac{-4}{2\times 4}=-\dfrac{1}{2}$.

On peut donc factoriser g par $g(x)=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$