Chapitre 1- Suites numériques.

I. Exercices

1. Énoncés

Raisonnement par récurrence

Exercice 1

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 2

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^5 + k^7\right) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4.$$

Exercice 3

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a :

$n^2 - 1 \leq 2^n < n!$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie sur N par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 - n \end{cases}$.

Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_n > n$, puis démontrer par récurrence que, pour tout entier $n > n_0$, $u_n > n$.

Sens de variation d'une suite

Exercice 5

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par: $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = u_n (2 - u_n)$

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.
2) En déduire le sens de variation de la suite u.

Exercice 6

1) La suite (u_n) est définie sur N* par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.

Déterminer le sens de variation de la suite u.

2) Étudier de même la monotonie de la suite (u_n) définie sur N* par $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 7

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ telle que
$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$. Déterminer la raison de (u_n).

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 8 \end{cases}$.

Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n - 10$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de *n* puis de u_n.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Limites d'une suite

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite admet une limite et, si oui, préciser cette limite:

a) $u_n = n^2 - \sqrt{2n+1}$

b) $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$

c) $u_n = \frac{n^2-1}{2n+1}$

d) $u_n = \frac{n^2+3n-9}{-n^2+3n-5}$

e) $u_n = -\frac{3}{2^n}$

f) $u_n = -\frac{3^{n+1}}{2^n}$

g) $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie sur N par: $u_n = \frac{2-\sin^2(n)}{3n+1}$.

1) Montrer que, pour tout entier *n*, on a : $\frac{1}{3n+1} \leq u_n \leq \frac{2}{3n+1}$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie sur N par: $u_n = n + \sqrt{n^2+3n}$.

1) Vérifier que, pour tout entier *n*, $u_n \geq 2n$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 12

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

Étudier les variations de f (dresser le tableau de variation de f).

2.a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n > \sqrt{2}$.

b) Montrer que, pour tout $x > \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d) Prouver qu'elle converge.

3) Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. En déduire sa valeur.

Exercice 13***

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n$.

1) Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

2) En calculant $f'(x)$ de deux façons différents, déterminer la somme :

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1}.$$

3) En déduire les limites des sommes suivantes :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{n}{3^{n-1}}.$$

Exercice 14***

Soient deux suites u et v telles que, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 1 \\ 0 \leq v_n \leq 1 \end{cases}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 1$. Démontrer que les suites u et v sont convergentes et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Exercice 15***

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0{,}95 u_n \qquad \text{si et seulement si} \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1{,}9.$$

2) On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

a) Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.
b) Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\ ;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1{,}9$.
c) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.
d) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leq 1{,}9$.

3.a) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
b) Que peut-on en déduire pour la suite ?
4) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0 \leq u_n \leq 0{,}95^{n-16}u_{16}$.
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Des sommes et des produits

Exercice 16***: sommes téléscopiques

Partie A : étude d'un exemple.

On considère la suite définie sur N* par : $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$.

1) Vérifier que, pour tout entier n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

2) On note S_n la somme $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$. Montrer que, pour tout entier n non nul, $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Partie B : somme téléscopique.

Définition :
*Quels que soient les entiers n et p, tels que p ≤ n, on appelle **somme télescopique** toute somme de la forme :* $\sum_{i=p}^{i=n}(a_{i+1}-a_i)$, *où* $(a_n)_{n\in N}$ *est une suite numérique.*

1) Soit p un entier naturel fixé, calculer, pour tout entier n, tel que $n \geq p$, $\sum_{i=p}^{i=n}\left(a_{i+1}-a_i\right)$.

2) Soit $(a_n)_{n\in N}$ est une suite réelle.
a) Simplifier l'expression : $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_{i-1})$.
b) Simplifier l'expression : $\sum_{i=1}^{n}(2a_{i+1}-3a_i+a_{i-1})$.

Exercice 17***: sommes doubles

Définition :
On appelle somme double toute somme du type $\sum_{i=k}^{i=n}\sum_{j=k'}^{j=m} a_{ij} = \sum_{\substack{k\leq i\leq n\\ k'\leq j\leq m}} a_{i,j}$.

On peut considérer les termes de cette somme comme les éléments d'un tableau à n lignes et m colonnes.

$$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1j}\dots\dots a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2j}\dots\dots a_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\ a_{i2}\dots a_{ij}\dots\dots a_{im} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\dots a_{nj}\dots\dots a_{nm} \end{bmatrix}$$

Pour calculer $\sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} a_{i,j}$ *:*

- on peut calculer la somme des termes de chaque ligne, puis additionner ces sommes : $\sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} a_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)$

- ou bien calculer la somme des termes de chaque colonne, puis additionner ces sommes : $\sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$

Remarque : Avant de se lancer dans le calcul d'une somme double, il faut VISUALISER les termes du tableau à additionner, pour organiser la sommation : sommation des lignes ou sommations des colonnes.

Calculer les sommes doubles suivantes :

a) $A_n = \sum\limits_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}} 3^{i+j}$ b) $B_n = \sum\limits_{1\le i\le j\le n} \dfrac{i}{j}$.

Exercice 18* : le *symbole* Π**

Définition :

Si $(u_n)_{n\in N}$ est une suite de nombres réels, quels que soient les entiers naturels p et n tels que $p \le n$, on note $\prod\limits_{k=p}^{k=n} u_k$ le produit $u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_n$.

Exemple : $\prod\limits_{k=1}^{k=n} k = n!$.

1) Écrire à l'aide du symbole Π les produits suivants :

a) $1\times 3\times 5\times \dots\dots\dots\times 49$.

b) $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{20}\right)$.

2.a) Soit p un entier naturel fixé, calculer, pour tout entier n tel que $n \ge p$, $\prod\limits_{i=p}^{i=n} \dfrac{a_{i+1}}{a_i}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\prod\limits_{k=0}^{k=n} (au_k) = a^{n+1} \times \left(\prod\limits_{k=0}^{k=n} u_k\right)$,

a étant un réel non nul.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\prod\limits_{k=0}^{k=n} u_k v_k = \left(\prod\limits_{k=0}^{k=n} u_k\right)\times\left(\prod\limits_{k=0}^{k=n} v_k\right)$.

3.a) Déterminer, en fonction de n, le produit suivant : $\prod_{k=1}^{k=n} \frac{k}{k+2}$.

b) Déterminer, en fonction de n, le produit suivant : $\prod_{k=2}^{k=n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

c) Vérifier l'égalité suivante : $\prod_{k=1}^{k=n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{\left(2^n \times n!\right)^2}{(2n)!}$.

4) Démontrer par récurrence la propriété : $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=n+1}^{2n} k$ pour $n \geq 1$.

Exercice 19***

Soit un réel a donné, on considère la suite (u_n) définie sur N par

$u_n = \cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2^2}\right)...\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$.

1) Écrire u_n à l'aide du symbole Π.

2.a) Avec une formule de duplication, écrire $\sin(a)$ en fonction de $\sin\left(\frac{a}{2}\right)$ et de $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$.

b) Écrire de même $\sin\left(\frac{a}{2^i}\right)$ en fonction de $\sin\left(\frac{a}{2^{i+1}}\right)$ et de $\cos\left(\frac{a}{2^{i+1}}\right)$ pour tout entier $i \in [\![1; n-1]\!]$ (La notation « crochets avec double barres » permet de représenter l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 1 et n – 1.)

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. Corrigés des exercices 1 à 19

Exercice 1

Initialisation: pour n=1, $\left.\begin{array}{l} 1(1+1) = 2 \\ \frac{1\times 2\times 3}{3} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1(1+1) = \frac{1\times 2\times 3}{3}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité: supposons qu'il existe un rang n tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Pour tout entier n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$

$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

On a ainsi montré que: pour tout entier naturel non nul n, $\mathcal{P}(n)$ vraie) $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion: pour tout entier non nul n, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 2

Initialisation: pour $n = 1$, $\left.\begin{array}{l} 1^5 + 1^7 = 2 \\ 2\left(\frac{1\times 2}{2}\right)^4 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1^5 + 1^7 = 2\left(\frac{1\times 2}{2}\right)^4 \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie.

Hérédité: supposons qu'il existe un rang $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Pour tout entier n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(k^5 + k^7\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(k^5 + k^7\right) + (n+1)^5 + (n+1)^7$$

$$= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5 + (n+1)^7 \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

$$= (n+1)^4\left(2\left(\frac{n}{2}\right)^4 + (n+1) + (n+1)^3\right)$$

$$= \frac{1}{8}(n+1)^4\left[n^4 + 8(n+1) + 8(n+1)^3\right]$$

Développons $n^4 + 8(n+1) + 8(n+1)^3$

$$n^4 + 8(n+1) + 8(n+1)^3 = n^4 + (8n+8) + 8\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right)$$

$$= n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16$$

Développons : $(n+2)^4$

$$(n+2)^4 = \left(n^2 + 4n + 4\right)^2 = n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16$$

On obtient donc : $\sum_{k=1}^{n+1}\left(k^5 + k^7\right) = \frac{1}{8}(n+1)^4 \, (n+2)^4 = 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4$

On a ainsi montré que: pour tout entier non nul, $\mathcal{P}(n)$ vraie) $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : pour tout entier non nul n, $\sum_{k=1}^{n}\left(k^5 + k^7\right) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$.

Exercice 3

a) Commençons par démontrer pour tout entier $n \geq 4$: $2^n \geq n^2 - 1$.

Initialisation : $n = 4$ $\left.\begin{array}{l} 4^2 - 1 = 15 \\ 2^4 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^4 \geq 4^2 - 1 \Rightarrow \mathcal{P}(4)$ est vraie.

Hérédité: supposons qu'il existe un rang $n \geq 4$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Pour tout entier $n \geq 4$: $2^{n+1} = 2 \times 2^n \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2 \times \left(n^2 - 1\right) \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2 - 2$

Comparons $2n^2 - 2$ et $(n+1)^2 - 1$; ce qui revient à étudier le signe de :

$$\left(2n^2 - 2\right) - (n+1)^2 + 1 = n^2 - 2n - 2$$

Étudions le signe du trinôme $x^2 - 2x - 2$.

$\Delta = 12 \quad x_1 = 1-\sqrt{3} \leq 0 \qquad\qquad x_2 = 1+\sqrt{3} \leq 4$

Donc, pour tout entier $n \geq 4$: $n^2 - 2n - 2 \geq 0$.

On en déduit : $2n^2 - 2 \geq (n+1)^2 - 1$, ce qui implique : $2^{n+1} \geq (n+1)^2 - 1$

On a ainsi montré que, pour tout entier $n \geq 4$, $\mathcal{P}(n)$ vraie) $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 4$, $2^{n+1} \geq (n+1)^2 - 1$.

b) Démontrons maintenant par récurrence que, pour tout entier $n \geq 4$: $2^n < n!$

Initialisation : $n = 4$ $\left.\begin{array}{l} 2^4 = 16 \\ 4! = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^4 < 4! \Rightarrow \mathcal{P}(4)$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \geq 4$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Pour tout entier $n \geq 4$: $2^{n+1} = 2 \times 2^n < 2n!$

$4 \leq n \Rightarrow 2 \leq n+1 \Rightarrow 2n! \leq (n+1)n!$ or $(n+1)n! = (n+1)!$

donc $2^{n+1} < (n+1)!$

On a ainsi montré que, pour tout entier $n \geq 4$, $\mathcal{P}(n)$ vraie) $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 4$, $2^n < n!$

Conclusion : pour tout entier $n \geq 4$, $n^2 - 1 \leq 2^n < n!$.

Exercice 4

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 - n \end{cases}$$

$u_1 = -2 < 1$, $u_2 = -2 < 2$, $u_3 = 0 < 3$ mais $u_4 = 6 > 4$.

$n_0 = 4$ est le premier entier tel que $u_n > n$.

Initialisation : $n = 4$

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \geq 4$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Pour tout entier $n \geq 4$:

$u_{n+1} = u_n + n^2 - n \Rightarrow u_{n+1} > n + n^2 - n \Rightarrow u_{n+1} > n^2$ (par hypothèse de récurrence).

Comparons n^2 et $n+1$; pour cela déterminons le signe de $n^2 - n+1$.

Posons : $f(x) = x^2 - x - 1$

$\Delta = 5$ d'où : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Puisque : $n \geq 4$: $n^2 - n - 1 > 0 \Leftrightarrow n^2 > n+1$.

On en déduit : pour $n \geq 4$: $u_{n+1} > n^2 > n+1$.

On a ainsi montré que, pour tout entier $n \geq 4$, $\mathcal{P}(n)$ vraie) $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > n$.

Exercice 5

1) *Initialisation:* pour $n = 0$, $0 \leq \dfrac{1}{3} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie.

Hérédité: supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Pour tout entier n :

$u_{n+1} = u_n(2-u_n) = 2u_n - (u_n)^2 = 1 - \left(1 - 2u_n + (u_n)^2\right) = 1 - (u_n - 1)^2$