Analyse

Exercice 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim v_n$. Démontrez que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminez le signe au voisinage de l'infini de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$

Équivalence de suites.

1. Par définition il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 et telle que, à partir d'un rang n_0, on a $u_n = v_n\alpha_n$. On choisit un rang n_1 à partir duquel $\alpha_n > 0$ et alors, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a u_n et v_n de même signe.

2. Comme, en 0, on a les développements limités $\operatorname{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, par différence $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^3}$ et, donc, $u_n < 0$ pour n assez grand.

Exercice 2

On pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}\cdot$

1. Décomposez $f(x)$ en éléments simples et en déduire la primitives G de f définie sur l'intervalle $]-1,3[$ telle que $G(1) = 0$.

2. Déterminez le développement en série entière en 0 de la fonction f et précisez le rayon de convergence.

3. Déduire de ce développement la valeur de $G^{(3)}(0)$.

Décomposition en éléments simples et séries entières associées.

1. $f(x) = \dfrac{\alpha}{(x+1)^2} + \dfrac{\beta}{x+1} + \dfrac{\gamma}{3-x}$ et, en utilisant les équivalents en -1 et en 3, on obtient $\alpha = \dfrac{1}{4}$ et $\gamma = \dfrac{1}{16}\cdot$

Enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0 = \beta - \gamma$ d'où $\beta = \dfrac{1}{16}\cdot$

Par suite G est primitive de f sur $]-1,3[$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que, sur cet intervalle, $G(x) = -\dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{1}{16}\ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right) + k$.

Enfin $G(1) = 0 \iff k = \dfrac{1}{8}\cdot$

2. Sur $]-1,1[$ on a $16f(x) = \dfrac{1}{1+x} - 4\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$ ou encore

$16f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{-1-n}x^n$ soit

$16f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n(4n+5) + E^{-1-n}\right]x^n$ et le rayon de convergence de cette série entière est 1.

3. $G^{(3)}(0) = f''(0) = 2a_2$ si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor, d'où $G^{(3)}(0) = \left(13 + \dfrac{1}{27}\right) \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{44}{27}\cdot$

Exercice 3

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}\cdot$
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$ pour $x > -1$. Calculez $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Formule de Leibniz.

1. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $]-1,+\infty[$ respectivement avec $g^{(p)} : x \mapsto 2^p e^{2x}$ et $h^{(q)} : x \mapsto (-1)^q q!(1+x)^{-q-1}$.

2. Par suite $x > -1 \Rightarrow f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k!(1+x)^{-k-1} 2^{n-k} e^{2x}$, soit

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n n! e^{2x}}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!(2+2x)^k}\cdot$$

3. On procède par récurrence sur n en utilisant $(fg)^{(n+1)} = (f'g + fg')^{(n)}$, l'hypothèse de récurrence et le triangle de Pascal.

Exercice 4

Théorème(s) des accroissements finis.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$.
On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrez que si f' admet une limite en x_0, alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

2. Prouver que l'implication :

$$\big(f \text{ est dérivable en } x_0\big) \Rightarrow \big(f' \text{ admet une limite finie en } x_0\big)$$

est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

---

1. Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et à valeurs réelles alors il existe un élément c de $]a,b[$ pour lequel $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

2. L'inégalité des accroissements finis est plus adaptée que l'égalité précédente. Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)$ où ℓ est la limite de f' en x_0.
La fonction φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$ avec, sur cet ensemble, $\varphi'(x) = f'(x) - \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Au voisinage de x_0 on a $|\varphi'| \leqslant \varepsilon$ et, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à droite et à gauche de x_0, on en déduit que φ est localement ε-lipschitzienne, d'où $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \varepsilon|x - x_0|$ au voisinage de x_0. Comme $\varphi(x_0) = 0$ cela montre que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = \ell$.

3. g est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ avec $g(x) = O(x^2)$, donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Si $x \neq 0$ alors $g'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et donc $g'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = -1$, ce qui montre que g' n'est pas continue en 0. Cela montre que l'implication proposée est fausse.

Exercice 5

Séries de Bertrand.

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\big[\ln(n)\big]^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\alpha \leqslant$ o**

En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\alpha >$ o**

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\big[\ln(x)\big]^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{\big[\ln(n^2+n)\big]^2}$.

---

1. (a) Si $\alpha \leqslant 0$ alors dès que $n \geqslant 3$ on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ et, donc, $\sum u_n$ diverge.

(b) Sinon f est positive continue et décroissante sur $[2,+\infty[$, et donc $\sum u_n$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $[2,+\infty[$.

Si $X \geqslant 2$ le changement de variable $u = \ln(x)$ montre :
$\displaystyle\int_e^X f(x)\,dx = \int_1^{\ln(X)} \frac{du}{u^\alpha}$ et, donc, f est intégrable sur $[2, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
En résumé : $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$, $\ln(n^2+n) \underset{n\to\infty}{\sim} 2\ln(n)$ et $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$
soit $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{=} \exp\left(-\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} e\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ d'où, ici,
$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e}{4n\ln(n)}$ et la question précédente dans le cas où $\alpha = 1$ montre la divergence de la série proposée.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrez que si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Indication : écrivez judicieusement la définition de $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ puis majorez, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

---

1. Soit $q = \dfrac{1+\ell}{2}$, alors $\ell < q < 1$ et, par définition de la limite, à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$ d'où $u_n = O(q^n)$. Comme $\sum q^n$ est une série à termes positifs convergente, par domination $\sum u_n$ converge.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} < 1$ et la question précédente montre la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 7

Équivalence de suites, séries, absolue convergence.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrez que : $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudiez la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln(n)}$.
(i est ici le nombre complexe de carré égal à -1).

---

1. Par définition de $\sim$ à partir d'un certain rang $0 \leqslant \dfrac{u_n}{2} \leqslant v_n \leqslant 2u_n$.
$\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum(2u_n)$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ converge par majoration.
$\sum v_n$ converge $\Rightarrow \displaystyle\sum \frac{u_n}{2}$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge toujours par majoration.
On a également utilisé la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

2. On évitera de faire remarquer à l'examinateur que $X^2 = -1$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$ mais on doit le savoir.
On pose, pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_n = \dfrac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln(n)}$.
Alors $|\alpha_n| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)} \underset{n\to\infty}{=} o(n^{-\frac{5}{4}})$ et la question précédente montre que $\sum \alpha_n$ est absolument convergente et, donc, convergente.

Exercice 8

Théorème spécial des séries alternées, séries de fonctions.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
1. (a) Démontrez que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.
Indication : considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de cette série.

2. (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}.$$

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de cette série de fonctions.

---

1. (a) L'hypothèse de positivité de u_n est redondante.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_{2k}-u_{2k+1})$ et donc, comme $(u_n)_n$ décroît, la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante car, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u_{2k}-u_{2k+1} \geqslant 0$.
De même $S_{2n} = u_0 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{2k+1}-u_{2k+2})$ et $(S_{2n})_n$ décroît.

De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par hypothèse. Cela montre que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes, elles convergent donc et ont même limite. Par suite $(S_n)_n$ converge *i.e.* $\sum u_n$ converge.

(b) Le résultat attendu est : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^k u_k\right| \leqslant u_n$.
Si, par exemple, n est pair on pose $n = 2p$.
Alors $\sum\limits_{k=2p}^{\infty} (-1)^k u_k = \sum\limits_{k=p}^{\infty} (u_{2k} - u_{2k+1}) \geqslant 0$ et aussi
$\sum\limits_{k=2p}^{\infty} (-1)^k u_k = u_{2p} - \sum\limits_{k=p}^{\infty} (u_{2k+1} - u_{2k+2}) \leqslant u_{2p}$ d'où $0 \leqslant \sum\limits_{k=2p}^{\infty} (-1)^k u_k \leqslant u_{2p}$.
Le cas où n est impair se traite de même.

2. (a) Si $x < 0$ alors $\sum \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ diverge grossièrement.
Si $x \geqslant 0$ en appliquant la question **1.**(a) on obtient la convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
En résumé il y a convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Sur ce même intervalle la fin de la question **1.** montre que, si $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{-k} e^{-kx}}{k}\right| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ terme général d'une suite indépendante de x et qui converge vers 0, d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9

Convergence uniforme, continuité, double limite.

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\, e^{-nx^2}$.
(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
(c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
(d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

---

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε dans $\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_{\Rightarrow} \forall x \in X,\ \left|g_n(x) - g(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

ou encore à partir d'un certain rang n_0 la fonction $g_n - g$ est bornée et la suite $\left(\|g_n - g\|_\infty^X\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

2. (a) $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et, si $x \neq 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\chi_{\{0\}}$ que l'on notera f.
(b) Chaque f_n est continue en 0 alors que f ne l'est pas, il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Si $a > 0$ alors $\|f_n - f\|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[\![A, +\infty[$.
(d) S'il y avait convergence uniforme sur $]0, +\infty[$, comme chaque f_n est continue en 0 le théorème de la double limite montrerait :

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \lim_{n\to\infty} f_n(0) = f(0),$$

ce qui est faux.

Exercice 10

Convergence uniforme et intégrale sur un segment.

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\,\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\cdot$

1. Démontrez que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Calculez $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (x^2+1)\,\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,dx.$

---

1. $\forall (x,n)\in[0,1]\times\mathbb{N},\ |f_n(x) - (x^2+1)e^x| = \dfrac{2x(x^2+1)\operatorname{ch}(x)}{n+x} \leqslant \dfrac{4\operatorname{ch}(1)}{n}$ qui est indépendant de x et tend vers 0 lorsque $n\to\infty$, donc $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f : x \mapsto (x^2+1)e^x$.

2. Comme chaque f_n est continue sur $[0,1]$ la question précédente montre que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f$, autrement dit $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (x^2+1)\,\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\,dx = \int_0^1 (x^2+1)e^x\,dx = \Big[(x^2-2x+3)e^x\Big]_0^1$ en intégrant deux fois par parties, d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (x^2+1)\,\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\,dx = 2e-3.$

Exercice 11

Convergence uniforme.

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite