Premier degré et systèmes

Quand on ne sait pas !

La manipulation d'expressions mathématiques nécessite la connaissance de quelques règles simples :

- **Priorités de calcul**. Dans le cas de calculs en cascade, les calculs se font de l'intérieur vers l'extérieur (on commence par les calculs à l'intérieur des parenthèses).

- **Développement**. Bien faire attention à la règle des signes quand on développe des produits entre expressions.

- **Identités remarquables**. À connaître évidemment.
  - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Que faire ?

Se rappeler quelques techniques basiques :

- **Équations du premier degré**. On développe si nécessaire et on isole l'inconnue dans un membre, quand on change un terme de membre, on change son signe. Un produit de facteur est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

- **Inéquations du premier degré**. Même technique et on exprime la solution sous forme d'intervalle, mais attention ! Quand on divise les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.

  Pour étudier le signe d'un produit de facteurs, il est pratique de faire un tableau de signes.

Règle pour étudier le signe d'un facteur du type $ax+b$:

$$ax+b=0 \text{ si, et seulement si : } x=-\frac{b}{a}.$$

si $a>0$	x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
	$ax+b$		$-$	0	$+$	
si $a<0$	x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
	$ax+b$		$+$	0	$-$	

- **Systèmes linéaires**. Ce sont les systèmes de la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

où *a, b, c, a', b', c'* sont des réels donnés, *x* et *y* sont les inconnues à chercher.

On utilise pour la résolution une méthode par addition.

a. On multiplie les deux membres des équations par des nombres convenablement choisis de manière à faire apparaître, pour une des inconnues, des coefficients opposés dans chacune des deux équations.

b. On additionne membre à membre les deux équations ainsi obtenues, on obtient alors une équation à une inconnue que l'on résout.

c. Pour obtenir la seconde inconnue, on remplace dans une des équations de départ.

CAS PARTICULIERS

- Si le système se réduit à deux équations identiques, il y a une infinité de solutions.
- Si le système revient à deux équations incompatibles, il n'y a pas de solution et l'ensemble solution est l'ensemble vide.

Conseils

Dans la résolution d'équations ou d'inéquations, il faut souvent privilégier l'usage des formes factorisées plutôt que les formes développées.

Exemples traités

EXEMPLE 1 Résolution de l'équation : $(5x+10)(4x-18)=0$.

Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

On aura : $5x+10=0$ ou $4x-18=0$, ce qui équivaut à $5x=-10$ ou $4x=18$.

On obtient : $x=-2$ ou $x=\dfrac{9}{2}$. L'ensemble solution est donc : $S=\left\{-2\ ;\ \dfrac{9}{2}\right\}$.

EXEMPLE 2 Résolution de l'inéquation : $3(x+4)-5(2x-7)\leq 2x+25$.

On développe : $3x+12-10x+35\leq 2x+25$.

On isole l'inconnue : $3x-10x-2x\leq -12-35+25$ soit $-9x\leq -22$.

Ainsi, on trouve $x\geq \dfrac{22}{9}$ et l'ensemble solution est : $S=\left[\dfrac{22}{9};+\infty\right[$.

EXEMPLE 3 Résolution du système $\begin{cases}2x-3y=-5\\5x+4y=22\end{cases}$.

En multipliant la première équation par 4 et la seconde par 3, on obtient :

$$\begin{cases}8x-12y=-20\\15x+12y=66\end{cases}.$$

En additionnant membre à membre, on obtient : $23x=46$ d'où $x=2$.

En remplaçant dans la première équation, on a : $4-3y=-5$ d'où $y=3$.

L'ensemble solution est donc : $S=\{(2\ ;\ 3)\}$.

Exercices

Exercice 1.1 Résoudre les équations suivantes :

1 $8(x+3)-4(3x-7)=2$

2 $x^2-(x+3)(x+2)=7$

3 $\frac{3x-1}{4}-\frac{x+1}{2}=\frac{2x-5}{8}+1$

4 $(2x-7)(3x-9)=0$

5 $(3x-6)(x^2+1)=0$

Exercice 1.2 Résoudre les inéquations suivantes :

1 $7(2x-3)+(5-8x)\leq 9x+1$

2 $6(3x-5)-9(x+8)\leq 6-3x$

3 $3x-4(2x-5)\leq 2(7x+3)$

4 $5x+3(8x-4)\leq 9x+2(3x-4)$

5 $(-2x-5)(-3x+8)\leq 0$

6 $(5x+3)(-4x-7)<0$

Exercice 1.3 Résoudre les systèmes suivants :

1 $\begin{cases} 7x-3y=0 \\ 5x-2y=10 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 7x-2y-6=0 \\ 5x+4y-26=0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 2x-3y+17=0 \\ 9y-x-46=0 \end{cases}$

Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1	Pour la troisième équation, il faut d'abord réduire au même dénominateur, puis supprimer ensuite les dénominateurs.
Exercice 1.2	Bien faire attention au sens de l'inéquation.
Exercice 1.3	Préférer les méthodes par addition aux méthodes par substitution pour résoudre les systèmes d'équations.

Solutions des exercices

Exercice 1.1

1 $8(x+3)-4(3x-7)=2$ s'écrit en développant : $8x+24-12x+28=2$.

On en déduit : $-4x=-50$ ce qui donne : $x=\dfrac{25}{2}$.

L'ensemble solution est : $S=\left\{\dfrac{25}{2}\right\}$.

2 $x^2-(x+3)(x+2)=7$ devient en développant : $x^2-(x^2+3x+2x+6)=7$.

On a alors $x^2-x^2-5x-6=7$: les termes du second degré disparaissent et on obtient : $-5x=13$ soit $x=-\dfrac{13}{5}$. L'ensemble solution est : $S=\left\{-\dfrac{13}{5}\right\}$.

3 $\dfrac{3x-1}{4}-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{2x-5}{8}+1$ devient en réduisant les deux membres au même dénominateur : $\dfrac{2(3x-1)-4(x+1)}{8}=\dfrac{2x-5+8}{8}$.

En supprimant les dénominateurs, on obtient : $6x-2-4x-4=2x+3$.

Ce qui conduit à $0x=9$, ce qui est faux, l'équation est donc impossible.

L'ensemble solution est alors : $S=\varnothing$.

4 $(2x-7)(3x-9)=0$ si et seulement, un au moins des facteurs est nul, ainsi on aura : $2x-7=0$ ou $3x-9=0$, ce qui équivaut à $x=\dfrac{7}{2}$ ou $x=3$.

L'ensemble solution est donc : $S=\left\{3\ ;\ \dfrac{7}{2}\right\}$.

5 $(3x-6)(x^2+1)=0$ équivaut à $3x-6=0$ ou $x^2+1=0$.

L'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution car elle conduit à $x^2=-1$ qui est impossible. Il reste donc : $3x-6=0$, d'où $x=2$.

L'ensemble solution est donc : $S=\{\ 2\ \}$.

Exercice 1.2

1 $7(2x-3)+(5-8x)\leq 9x+1$ devient en développant :

$$14x-21+5-8x\leq 9x+1$$

Ce qui conduit à : $-3x\leq 17$ soit $x\geq -\dfrac{17}{3}$.

L'ensemble solution est donc : $S=\left[-\dfrac{17}{3};+\infty\right[$.

2 $6(3x-5)-9(x+8)\leq 6-3x$ devient : $18x-30-9x-72\leq 6-3x$.

soit $12x\leq 108$ donc $x\leq 9$. L'ensemble solution est donc : $S=]-\infty\ ;\ 9]$.

3 $3x-4(2x-5)\leq 2(7x+3)$ s'écrit : $3x-8x+20\leq 14x+6$.

Soit $-19x\leq -14$ et $x\geq\dfrac{14}{19}$. L'ensemble solution est donc : $S=\left[\dfrac{14}{19}\ ;\ +\infty\right[$.

4 $5x+3(8x-4)\leq 9x+2(3x-4)$ devient $5x+24x-12\leq 9x+6x-8$.

Soit $14x\leq 4$ et $x\leq\dfrac{2}{7}$. L'ensemble solution est donc : $S=\left]-\infty\ ;\ \dfrac{2}{7}\right]$.

5 $(-2x-5)(-3x+8)\leq 0$ revient à comparer un produit de facteurs à zéro et on peut faire un tableau de signe.

$-2x-5=0$ si et seulement si $x=-\dfrac{5}{2}$ et $-3x+8=0$ si et seulement si $x=\dfrac{8}{3}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$-2x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$-3x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
$(-2x-5)(-3x+8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution est donc : $S=\left[-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{8}{3}\right]$.

6 Pour $(5x+3)(-4x-7)<0$, on procède de la même manière qu'au 5 :

$5x+3=0$ si et seulement si $x=-\frac{3}{5}$ et $-4x-7=0$ si et seulement si $x=-\frac{7}{4}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{4}$		$-\frac{3}{5}$		$+\infty$
$5x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-4x-7$		$+$	0	$-$		$-$	
$(5x+3)(-4x-7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble solution est donc : $S=\left]-\infty\ ;\ -\frac{7}{4}\right[\cup\left]-\frac{3}{5}\ ;\ +\infty\right[$.

Exercice 1.3

1 $\begin{cases}7x-3y=0\\5x-2y=10\end{cases}$ devient en multipliant la 1re équation par – 2 et la 2e par 3 :

$$\begin{cases}-14x+6y=0\\15x-6y=30\end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on a : $x=30$.

En remplaçant dans la 1re équation, on obtient : $210-3y=0$ soit $y=70$.

L'ensemble solution est donc : $S=\{(30\ ;\ 70)\}$.

2 $\begin{cases}7x-2y-6=0\\5x+4y-26=0\end{cases}$ s'écrit en multipliant la 1re équation par 2 :

$$\begin{cases}14x-4y-12=0\\5x+4y-26=0\end{cases}$$

Solutions

Par addition, on obtient : $19x-38=0$ soit $x=2$.

En remplaçant dans la 1re équation, on a : $14-2y-6=0$, soit $y=4$.

L'ensemble solution est donc : $S=\{(2\ ;\ 4)\}$.

3 $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ devient en multipliant la 1re équation par – 2 : $\begin{cases} -2x-6y=-2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

Par addition, on trouve : $-5y=1$ d'où $y=-\frac{1}{5}$.

En remplaçant dans la 1re équation, on a : $x-\frac{3}{5}=1$ soit $x=\frac{8}{5}$.

L'ensemble solution est donc : $S=\left\{\left(\frac{8}{5};-\frac{1}{5}\right)\right\}$.

4 $\begin{cases} 2x-3y+17=0 \\ 9y-x-46=0 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} 2x-3y+17=0 \\ -x+9y-46=0 \end{cases}$.

En multipliant la 2e équation par 2, on a : $\begin{cases} 2x-3y+17=0 \\ -2x+18y-92=0 \end{cases}$.

Par addition, on obtient $15y-75=0$ soit : $y=5$.

En remplaçant dans la 2e équation, on a : $-x+45-46=0$ soit $x=-1$.

L'ensemble solution est donc : $S=\{(-1\ ;\ 5)\}$.