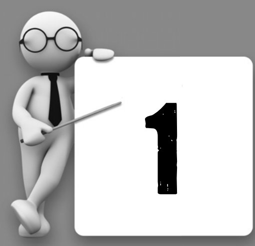
La forme canonique



Quand on ne sait pas !

- La plupart des polynômes du second degré peuvent s'écrire sous 3 formes : développée, factorisée et canonique.

EXEMPLE 1 $A(x)=\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2$. Ici, A est sous forme factorisée.

EXEMPLE 2 $B(x)=2x^2-11x-21$. Ici, B est sous forme développée.

EXEMPLE 3 $C(x)=3(x+2)^2+5$. Ici, C est sous forme canonique.

- La forme canonique de l'expression $A(x)=ax^2+bx+c$ est du type :

$$A(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$$

Que faire ?

- Dans un premier temps, on détermine les valeurs de *a, b* et *c*.
- Ensuite on calcule les valeurs de α et β à l'aide des formules de cours :

$$\alpha=-\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

- On peut maintenant mettre A sous forme canonique en remplaçant α et β par leur valeur dans la formule :

$$A(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$$

REMARQUE On constate avec cette égalité que l'on a : $\beta=A(\alpha)$.

EXEMPLE 4 $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

- On a : $a = 3,\ b = -5,\ c = 2$.
- On en déduit : $\alpha = \dfrac{5}{6}$ et $\beta = -\dfrac{1}{12}$.
- On trouve alors : $A(x) = 3\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{1}{12}$.

Conseils

- Il faut faire attention aux signes dans les calculs, ainsi le moins devant la barre de fraction pour le calcul de β s'applique à l'ensemble de la fraction. Il faut prendre garde également au fait que le carré d'un nombre négatif est un nombre positif : par exemple, le carré de –3 s'écrit $(-3)^2$, et non pas -3^2 qui est égal à –9.
- Il est toutefois plus facile de calculer la valeur de β en considérant l'égalité :
$$\beta = A(\alpha)$$
- Ne pas hésiter à développer l'expression obtenue pour vérifier si elle est égale à celle du départ.

Exemple traité

Mettre sous forme canonique l'expression suivante :

$$A(x) = -x^2 + 2x + 5$$

SOLUTION

On repère les valeurs de *a, b* et c : $a = -1,\ b = 2,\ c = 5$.

- On calcule α : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-2} = 1$.
- On calcule ensuite β, le plus simple est de le calculer avec :
$\beta = A(\alpha) = -(1)^2 + 2\times 1 + 5 = 6$ (ce calcul est plus rapide et moins générateur de fautes de signe).

On peut donc conclure sur la forme canonique de A :

$$A(x) = -1(x-1)^2 + 6 \text{ ou } A(x) = -(x-1)^2 + 6 \text{ ou si l'on préfère :}$$

$$A(x) = 6 - (x-1)^2$$

Exercices

EXERCICE 1.1 Mettre sous forme canonique $A(x) = -2x^2 + 8x$.

EXERCICE 1.2 Mettre sous forme canonique $B(x) = (-3x+6)^2 + 1$.

EXERCICE 1.3 Mettre sous forme canonique $C(x) = -\sqrt{3}x + x^2 - 1$.

EXERCICE 1.4 Mettre sous forme canonique $D(x) = (2x+1)(1-3x)$.

EXERCICE 1.5 Mettre sous forme canonique :

$$E(x) = (x-3)(2x+7) - (x+4)(1-3x)$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1	Attention, ici on a : $c = 0$.
EXERCICE 1.2	Il faut d'abord développer B ou mettre le –3 en facteur dans le carré.
EXERCICE 1.3	Il faut ordonner C.
EXERCICE 1.4	Développer D.
EXERCICE 1.5	Développer E puis réduire et ordonner.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1 Comme $A(x)=-2x^2+8x$, on a alors : $a=-2,\ b=8,\ c=0$. Ceci permet de calculer α et β.

$$\alpha=-\frac{8}{-4}=2 \text{ et } \beta=A(\alpha)=-2\times 2^2+8\times 2=8$$

La forme canonique de A est donc :

$$A(x)=-2(x-2)^2+8$$

EXERCICE 1.2 On développe d'abord B et on obtient $B(x)=9x^2-36x+37$. On a alors : $a=9,\ b=-36,\ c=37$, ce qui permet de calculer les valeurs de α et de β. On trouve : $\alpha=\frac{36}{18}=2$ et $\beta=B(\alpha)=B(2)=1$.

La forme canonique de B est :

$$B(x)=9(x-2)^2+1$$

REMARQUE On pouvait choisir de mettre –3 en facteur dans le carré, ce qui donnait : $B(x)=\left(-3(x-2)\right)^2+1=(-3)^2(x-2)^2+1=9(x-2)^2+1$.

EXERCICE 1.3 On ordonne C suivant les puissances décroissantes de x, ce qui donne :

$$C(x)=x^2-\sqrt{3}x-1$$

Comme $a=1,\ b=-\sqrt{3},\ c=-1$, on a alors les valeurs de α et β.

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \beta=-\frac{7}{4}$$

La forme canonique de C est :

$$C(x)=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$$

EXERCICE 1.4 On développe la forme factorisée de D : $D(x)=-6x^2-x+1$.

On détermine ensuite α et β. On trouve $\alpha=-\frac{1}{12}$ et $\beta=\frac{25}{24}$ et D peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D(x)=-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}$$

EXERCICE 1.5 On développe d'abord E :

$E(x)=2x^2+7x-6x-21-\left(x-3x^2+4-12x\right)$ puis on réduit et on ordonne, ce qui donne :

$$E(x)=2x^2+x-21+11x+3x^2-4=5x^2+12x-25$$

On a alors $a=5$, $b=12$ et $c=-25$. Ce qui permet de calculer les valeurs de α et β. On trouve $\alpha=-\dfrac{12}{10}=-\dfrac{6}{5}$ et $\beta=E(\alpha)=E\left(-\dfrac{6}{5}\right)=-\dfrac{161}{5}$.

La forme canonique de E est :

$$E(x)=5\left(x+\frac{6}{5}\right)^2-\frac{161}{5}$$

Solutions

Équations du second degré

Quand on ne sait pas !

- Revoir la résolution d'équation du 1^er^ degré du type $x+a=b$ ou $ax=b$, ainsi que l'équation du 2^d^ degré de la forme $x^2=a$.

- Vérifier si l'équation proposée peut se factoriser à l'aide d'un facteur commun ou d'une identité remarquable.

EXEMPLE 1 Résoudre $x^2-3x=0$ revient à résoudre : $x(x-3)=0$.

EXEMPLE 2 Résoudre $\frac{1}{4}x^2+3x+9=0$ revient à résoudre :

$$\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2=0$$

- Dans le cas d'équations du 2^d^ degré, incomplètes, du type $ax^2+c=0$, se ramener à une équation de la forme : $x^2=-\frac{c}{a}$. On discute ensuite selon le signe de $-\frac{c}{a}$ de l'existence de solution.

EXEMPLE 3 Résoudre $2x^2-6=0$ revient à résoudre : $x^2=3$. Il y a donc 2 solutions qui sont : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

EXEMPLE 4 Résoudre $3x^2+5=0$ revient à résoudre : $x^2=-\frac{5}{3}$. Or un carré ne pouvant être négatif, l'équation n'a pas de solution.

Que faire ?

- Dans un premier temps, on détermine les valeurs de a, b et c.
- Ensuite on calcule la valeur du discriminant.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- On identifie, selon le signe du discriminant, dans quel cas on se trouve :

Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions distinctes : x_1 et x_2.
Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une seule solution : x_0.
Si $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution réelle.

- Enfin on donne la valeur des solutions de l'équation dans les deux cas où elles existent.

Si $\Delta > 0$, alors les solutions sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une seule solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

EXEMPLE 5 Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.

- On a : $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.
- On en déduit : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$.
- Comme le discriminant est positif, l'équation admet 2 solutions.
- On remplace les valeurs de a, b et Δ. On obtient alors :

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$$

Conseils

- Pour utiliser les différentes formules, ne pas oublier de noter les valeurs des coefficients, a, b, c en faisant attention aux signes.
- Il faut se rapporter à une équation du 2[d] degré dont le second membre est nul :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Le calcul du discriminant n'est pas toujours nécessaire, en particulier dans le cas d'équations incomplètes.
- Les formules précédentes ne sont valables que pour des équations du 2d degré, pas pour des équations de degré supérieur.

Exemple traité

Résoudre l'équation suivante : $2x^2 + 5x - 7 = 0$

SOLUTION

On repère les valeurs de *a, b* et c : $a = 2, b = 5, c = -7$.

- On calcule Δ : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 25 + 56 = 81$.
- $\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions.
- Les solutions de l'équation sont donc :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{-5 - 9}{4} = -\frac{7}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{-5 + 9}{4} = 1$$

On peut conclure que l'ensemble solution de l'équation est : $S = \left\{ -\frac{7}{2} ; 1 \right\}$.

Exercices

EXERCICE 2.1 Résoudre $\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$.

EXERCICE 2.2 Résoudre $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{7}{2} = 0$.

EXERCICE 2.3 Résoudre $(x+3)(x-2) = 13x - 17$.

EXERCICE 2.4 Résoudre $(2x+9)(x-8) = -72$.

EXERCICE 2.5 Résoudre $4x = (2x+5)^2 + 9$.

EXERCICE 2.6 Résoudre $(x+6)^2 + 25 = 0$.

EXERCICE 2.7 Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 37 m et d'aire 76,5625 m^2 ?