Banque PT 2016

Épreuve A

Problème d'algèbre linéaire

Nous noterons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans tout le problème, nous identifierons un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$.
Pour une matrice A de taille $m \times n$ quelconque, $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on désigne par A^T sa transposée.
On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, leur produit scalaire s'écrit matriciellement $\langle u, v \rangle = u^T v$.
On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Partie I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1°) Pourquoi peut-on trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres de A ?

2°) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres.

3°) La matrice A est-elle inversible ?

4°) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer ses coordonnées (x', y', z') dans la base $\mathcal{B}'$.

5°) Calculer $\langle Au, u \rangle$ en fonction de (x, y, z) puis en fonction de (x', y', z').

6°) Soit λ la plus petite valeur propre de A. Déduire de ce qui précède que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\langle Au, u \rangle \geqslant \lambda \|u\|^2$.

7°) Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, on pose $\langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Partie II

On considère toujours la matrice A de la partie précédente et on fixe $b \in \mathbb{R}^3$.
Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$J_b(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle - \langle u, b \rangle$$

1°) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction J_b ? Que vaut $J_b(0)$?

2°) Calculer le gradient de la fonction J_b, puis sa matrice Hessienne.

3°) En utilisant le résultat de la question **6°)** de la partie **I**, montrer que :

$$J_b(u) \geqslant \frac{1}{2}\lambda\|u\|^2 - \|b\|\|u\|$$

où λ désigne la plus petite valeur propre de A.

4°) En déduire que la fonction J_b est minorée et non majorée (on pourra étudier la fonction qui, à tout réel t, associe $\frac{\lambda}{2}\,t^2 - \alpha\,t$, pour une valeur de α bien choisie).

5°) Montrer que : $\inf\limits_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) \leqslant 0$.

6°) Montrer que, si $\|u\| > \dfrac{2\|b\|}{\lambda}$, alors $J_b(u) \geqslant 0$.

7°) En déduire que $\inf\limits_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf\limits_{u\in\overline{B}(0,r)} J_b(u)$, où $\overline{B}(0,r)$ désigne la boule fermée de centre l'origine et de rayon $r = \dfrac{2\|b\|}{\lambda}$.

8°) Montrer que la fonction J_b admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$.

9°) Montrer que cette fonction admet son minimum global au point $u = A^{-1}b$.

Partie III

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, symétrique, et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Deux vecteurs non nuls u et v de $\mathbb{R}^n$ sont dits A-conjugués si $\langle Au, v\rangle = 0$.

1°) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) de la matrice A, rangées dans l'ordre croissant $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

a) Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que, pour tout $i \leqslant n$, $Ae_i = \lambda_i e_i$.

b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la décomposition dans la base précédente s'écrit $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Exprimer en fonction des α_i les quantités $\|u\|^2$ et $\langle Au, u\rangle$.

c) Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_1\|u\|^2$.

d) En déduire que pour tout vecteur u non nul, on a $\langle Au, u\rangle \neq 0$.

2°) Soit $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ une famille de vecteurs non nuls A-conjugués deux à deux. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^n$.

3°) Rappeler (sans justification) l'expression de $(\alpha M + \beta N)^T$ et $(MN)^T$ en fonction de M^T et N^T, où M et N sont des matrices de taille quelconque (mais telles que les opérations sont bien définies) et α, β sont des réels.

4°) Si v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (que l'on identifie avec une matrice colonne), préciser la taille des matrices $v^T v$ et vv^T (on identifiera les matrices carrées de taille 1 et les nombres réels).

5°) Montrer que pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^n$, et toute matrice carrée B d'ordre n, on a $\langle Bu, v\rangle = \langle u, B^T v\rangle$.

6°) On définit pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ les matrices suivantes :

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_i v_i^T}{\langle Av_i, v_i\rangle}, \quad D_k = I_n - C_k A$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

a) Montrer que les matrices C_k sont symétriques pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) Montrer que, pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^n$, on a pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$C_k A w = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle Av_i, w\rangle}{\langle Av_i, v_i\rangle} v_i$$

c) En déduire que pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$, on a $C_k A v_j = v_j$. (On rappelle que les v_i sont A-conjugués deux à deux).

d) En déduire que pour $0 \leqslant j \leqslant k-1 \leqslant n$: $D_k v_j = 0$ et $D_k^T A v_j = 0$.

e) On a donc, pour tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $D_n v_j = 0$. Pourquoi peut-on en déduire que $D_n = 0$? Que vaut alors C_n ?

Exercice de probabilités

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note p la probabilité d'obtenir Pile et on suppose seulement $p \in]0, 1[$.
Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois Pile. On note N le nombre de lancers nécessaires.
Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de Pile obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1°) Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.

2°) Déterminer la loi du couple (N, X).

3°) On considère la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
Donner l'expression de la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f pour tout $k \geqslant 0$.
En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)^{k+1}$ au voisinage de 0 pour k entier positif.

4°) En déduire que la loi de X est donnée par :

$$\forall\, k \geqslant 1, P(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \text{ et } P(X = 0) = \frac{1-p}{2-p}$$

5°) Soit $\lambda \in]0, 1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géompétrique de paramètre λ indépendante de U. On note $Y = UV$.

a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(Y = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$)

c) Calculer la variance de Y.

6°) En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli l'autre une variable géométrique de même paramètre.

Corrigé

Problème - Partie I

Question 1.

La matrice A est symétrique réelle, on sait alors qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que l'on peut choisir la matrice de passage diagonalisante orthogonale :

$$\boxed{\exists\, P \in O_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = PD^tP \text{ avec } D \text{ diagonale}}$$

En d'autres termes, on peut aussi dire que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A possède au moins une base orthonormée de vecteurs propres, et si on confond vecteur et matrice colonne canoniquement associée, on confond également endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et matrice canoniquement associée, ce qui permet de parler de vecteur propre pour une matrice carrée . . .

Question 2.

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-2)((\lambda-2)^2-1) - (\lambda-2) = (\lambda-2)((\lambda-2)^2-2)$$
$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-2-\sqrt{2})(\lambda-2+\sqrt{2})}$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ (pour gagner de la place) ou (x, y, z) puisque l'on a le droit de confondre, on a :

$\star$ $AX = 2X \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff X \in \text{Vect}(1, 0, -1)$

$$\star\ AX = (2+\sqrt{2})X \iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -\sqrt{2}x \end{cases}$$
$$\iff X \in \text{Vect}(1, -\sqrt{2}, 1)$$

$\star$ $AX = (2-\sqrt{2})X \iff X \in \text{Vect}(1, \sqrt{2}, 1)$ (on peut d'ailleurs s'affranchir de ce dernier calcul, car il suffit de remplacer $\sqrt{2}$ par $-\sqrt{2}$, ou de remarquer que le dernier vecteur doit être orthogonal aux deux autres).

On a $\|(1, 0, -1)\| = \sqrt{2}$ et $\|(1, -\sqrt{2}, 1)\| = \|1, \sqrt{2}, 1)\| = 2$ et comme on veut une base ortho**normée**, on peut prendre :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \text{ alors } P^{-1} = P^T \text{ et :}$$

$$\boxed{A = PDP^{-1} = PDP^T, \text{ avec } D = \text{diag}(2, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})}$$

(Attention à bien prendre les coefficients diagoanux de D dans l'ordre correspondant aux colonnes de P !)

Question 3.

0 n'est pas valeur propre de A, donc $A = A - 0I_3$ est inversible.

Question 4.

La matrice P exprime les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ par leurs coordonnées dans l'ancienne base $\mathcal{B}$. On sait alors que si u a pour anciennes coordonnées (x, y, z) et pour nouvelles coordonnées (x', y', z'), on a avec les notations habituelles :

$$X = PX'$$

Ainsi $X' = P^{-1}X = P^T X$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}z \\ y' = \frac{1}{2}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Question 5.

On doit changer de base, il n'est donc pas astucieux, ici, de noter par la mettre lettre un vecteur et sa matrice colonne canoniquement associée. Nous noterons donc X la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et X' celle dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$. On a :

$\rightarrow \langle Au, u\rangle = (AX)^T X = X^T A^T X = X^T AX$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Soit, en développant :

$$\boxed{\langle Au, u\rangle = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz}$$

$\rightarrow$ Avec $X = PX'$, on a également :

$\langle Au, u\rangle = (PX')^T A(PX') = X'^T P^T APX' = X'^T P^{-1}APX' = X'^T DX'$

soit, en développant à nouveau :

$$\boxed{\langle Au, u\rangle = 2x'^2 + (2 - \sqrt{2})y'^2 + (2 + \sqrt{2})z'^2}$$

Question 6.

On a $2 + \sqrt{2} > 2 > 2 - \sqrt{2}$ (> 0), donc $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ et :

$$\langle Au, u\rangle \geqslant (2 - \sqrt{2})(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

Comme $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée $\|u\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et donc :

$$\boxed{\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \langle Au, u\rangle \geqslant (2 - \sqrt{2})\|u\|^2}$$

Question 7.

Notons $\varphi(u, v) = \langle u, v\rangle_A = \langle Au, v\rangle$.

$\star$ φ est bien une application de $(\mathbb{R}^3)^2$ vers $\mathbb{R}$.

$\star$ Pour tous vecteurs u et v et puisque A est symétrique et qu'une matrice carrée d'ordre 1, confondue avec son unique terme, est clairement symétrique :

$$\begin{aligned} \varphi(v, u) &= \langle Av, u\rangle = (Av)^T u = v^T A^T u = (v^T A^T u)^T = u^T Av = u^T A^T v \\ &= (Au)^T v = \varphi(u, v). \end{aligned}$$

Donc φ est une forme symétrique.

$\star$ Pour tous vecteurs et tout scalaire :

$$\begin{aligned}\varphi(u, v+\lambda v') &= \langle Au, v+\lambda v'\rangle = \langle Au, v\rangle + \lambda\langle Au, v'\rangle \\ &= \varphi(u,v) + \lambda\varphi(u,v')\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire par rapport à son deuxième argument, donc bilinéaire car symétrique.

$\star$ Pour tout vecteur u : $\varphi(u,u) = \langle Au, u\rangle \geqslant (2-\sqrt{2})\|u\|^2$, donc $\varphi(u,u) \geqslant 0$ et n'est nul que si u est le vecteur nul, donc φ est définie positive.

Tout ceci mis bout à bout montre que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Partie II

Question 1.

J_b est une application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ et $J_b(0) = 0$.

Question 2.

Avec $u = (x,y,z)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ et les calculs faits en **I 5°)**, on a :

$$J_b(u) = J_b(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - b_1x - b_2y - b_3z$$

D'où :

$$\frac{\partial J_b}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y - b_1 \,;\ \frac{\partial J_b}{\partial y}(x,y,z) = -x + 2y - z - b_2 \,;$$
$$\frac{\partial J_b}{\partial z}(x,y,z) = -y + 2z - b_3$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} J_b(x,y,z) = (2x - y - b_1, -x + 2y - z - b_2, -y + 2z - b_3)}$$

ce que l'on peut encore écrire : $\nabla(J_b)(x,y,z) = Au - b$, où A est la matrice de la partie **I**.

Puis, en tout point : $\dfrac{\partial^2 J_b}{\partial x^2}(x,y,z) = 2$; $\dfrac{\partial^2 J_b}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -1$; $\dfrac{\partial^2 J_b}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 0$; $\dfrac{\partial^2 J_b}{\partial y^2}(x,y,z) = 2$; $\dfrac{\partial^2 J_b}{\partial z \partial y}(x,y,z) = -1$; $\dfrac{\partial^2 J_b}{\partial z^2}(x,y,z) = 2$.

Par conséquent la hessienne $H(J_b)(x,y,z)$ (qui est symétrique, merci H. A. Schwarz) est la même en tout point et vaut (surpris(e) ?) :

$$\boxed{H(J_b)(x,y,z) = A}$$

Question 3.

On sait que :

$\rightarrow \langle Au, u\rangle \geqslant \lambda\|u\|^2$ (avec $\lambda = 2 - \sqrt{2}$)

$\rightarrow \langle u, b\rangle \leqslant |\langle u, b\rangle| \leqslant \|u\|.\|b\|$ (Cauchy-Schwarz), donc $-\langle u, b\rangle \geqslant -\|u\|\|b\|$

et donc :

$$\boxed{J_b(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle \geqslant \frac{\lambda}{2}\|u\|^2 - \|u\|\|b\|}$$

Question 4.

$\star$ On peut faire comme le suggère le concepteur, mais on peut remarquer que cela revient simplement à « canoniser » l'expression du second degré . . . On écrit donc :

$$\boxed{J_b(u) \geqslant \frac{\lambda}{2}\big((\|u\| - \frac{\|b\|}{\lambda})^2 - \frac{\|b\|^2}{2\lambda} \geqslant -\frac{\|b\|^2}{2\lambda}}$$

et J_b est bien minorée.
$\star$ En revanche, soit u un vecteur non nul quelconque et β réel. Comme $\langle Au, u\rangle > 0$, on a par équivalence d'une fonction polynôme, au voisinage de l'infini, à son terme de plus haut degré :

$$J_b(\beta u) = \frac{\beta^2}{2}\langle Au, u\rangle - \beta\langle u, b\rangle \underset{\beta\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

La fonction J_b n'est majorée dans aucune direction, donc n'est pas majorée (choisir une direction quelconque !).

Question 5.

Question sans surprise : on sait que J_b est minorée, donc l'infimum existe et puisque $J_b(0) = 0$, on a :

$$\boxed{\inf_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) \leqslant J_b(0) = 0}$$

Question 6.

Si $\|u\| > \dfrac{2\|b\|}{\lambda}$, on a $\dfrac{\lambda}{2}\|u\| - \|b\| > 0$ et comme $\|u\| > 0$, on a même :

$$\boxed{J_b(u) \geqslant \frac{\lambda}{2}\|u\|^2 - \|u\|\|b\| > 0}$$

Question 7.

Pour alléger, notons $B = \overline{B}(O, \dfrac{2\|b\|}{\lambda})$ et $C = \mathbb{R}^3 \setminus B$. On a $B \cup C = \mathbb{R}^3$, donc :

$$\inf_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u\in B\cup C} J_b(u) = \min(\inf_{u\in B} J_b(u), \inf_{u\in C} J_b(u))$$

Or $\inf\limits_{u\in C} J_b(u) \geqslant 0$ (question **6**°)) et on sait que $\inf\limits_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) \leqslant 0$ (question **5**°)), donc le plus petit des deux nombres $\inf\limits_{u\in B} J_b(u)$ et $\inf\limits_{u\in C} J_b(u))$ est négatif ou nul et il s'agit donc du premier, ce qui donne :

$$\boxed{\inf_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u\in B} J_b(u)}$$

Question 8.

$B = \overline{B}(O, \dfrac{2\|b\|}{\lambda})$ est une boule fermée, donc un fermé borné et comme $u \mapsto J_b(u)$ est continue, la restriction de J_b à B est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists\, u_0 \in B, \inf_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u\in B} J_b(u) = \min_{u\in B} J_b(u) = J_b(u_0)$$

et J_b a bien un minimum global sur $\mathbb{R}^3$ atteint en u_0.

Question 9.

La fonction J_b est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, donc ne peut atteindre un extremum sur $\mathbb{R}^3$ qu'en un point critique, *i.e.* un point ou son gradient est nul.
Or $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(J_b)(u) = 0 \iff Au = b$ et puisque A est inversible, il n'y a qu'une solution :

$$\boxed{u_0 = A^{-1}b}$$

Partie III

Question 1.

a) On a déjà dit cela en **I 1°)** :

A est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique possède une base orthonormée de vecteurs propres et on peut décider de choisir les vecteurs d'une telle base dans un ordre tel que les valeurs propres associées soient dans l'ordre croissant au sens large.

b) $\star$ $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, donc :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \implies \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

$Au = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i$, donc en utilisant le symbole de Kronecker :

$\langle Au, u\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \delta_{i,j}$

D'où :

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i$$

c) Comme λ_1 est la plus petite valeur propre, on a $\forall\, i, \lambda_i \geqslant \lambda_1$ et puisque $\alpha_i^2 \geqslant 0$:

$$\langle Au, u\rangle \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_1 = \lambda_1 \|u\|^2$$

d) Comme $\lambda_1 > 0$, $u \neq 0 \implies \lambda_1 \|u\|^2 > 0$ et $\langle Au, u\rangle > 0$, donc est non nul.

Question 2.

Puisque $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i = 0$, on a pour tout indice j de $[\![0, n-1]\!]$:

$$0 = \langle Av_j, \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \langle Av_j, v_i\rangle$$

Par hypothèse de conjugaison, $i \neq j \implies \langle Av_j, v_i\rangle = 0$ et il reste :

$$0 = \alpha_j \langle Av_j, v_j\rangle$$

et comme v_j est non nul, on a $\langle Av_j, v_j\rangle \neq 0$ et $\alpha_j = 0$.

Bref $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i = 0 \implies \forall\, i, \alpha_i = 0$ et la famille $(v_0, \dots, v_{n-1})$ est libre de cardinal n, donc est une base de $\mathbb{R}^n$.

Question 3.

$(\alpha M + \beta N)^T = \alpha M^T + \beta N^T$ et $(MN)^T = N^T M^T$.

Question 4.

$\star$ $v^T v$ est le produit d'une matrice $(1, n)$ par une matrice $(n, 1)$, donc est une matrice $(1, 1)$, confondue avec son unique terme, donc est considérée comme un scalaire.

$\star$ vv^T est le produit d'une matrice $(n, 1)$ par une matrice $(1, n)$, donc est une matrice carrée (n, n).