CHAPITRE 1. LES NOMBRES COMPLEXES

Capacités attendues

- Effectuer des calculs avec des nombres complexes quelle que soit leur forme d'écriture « à la main » ou avec une calculatrice.
- Passer d'une forme à une autre.
- Résoudre une équation du second degré à coefficients réels Représenter l'image d'une droite par une « transformation complexe ».
- Déterminer et construire l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|z-a|=k$ ou $\arg(z-a)=k$.

➢ **Prérequis**

- Connaître les mesures en radians des angles
- Connaître les valeurs du sinus et du cosinus des angles remarquables

➢ **Exercices 1 à 4**

Pour se préparer

Objectif
Vérifier qu'un nombre complexe est solution d'une équation du second degré.

Équation du second degré dans C

1. Montrer que l'équation du second degré $z^2-2z+4=0$ (E) n'admet pas de solution dans **R**.
2. Vérifier que le nombre complexe $z_1=1+i\sqrt{3}$ ($i^2=-1$) est une solution de (E).
3. Vérifier que le nombre complexe $\overline{z_1}=1-i\sqrt{3}$ est aussi une solution de (E).
4. Représenter z_1 et $\overline{z_1}$ dans le plan. Puis donner, éventuellement en utilisant la représentation graphique, le module et un argument de chacun de ces deux nombres complexes.

LE COURS

1. Forme algébrique d'un nombre complexe

1.1. Définition

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + \mathrm{i}b$ où a et b sont deux nombres réels et où i est un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté **C**.

Note importante : en physique on note généralement j le nombre i afin d'éviter les risques de confusion avec la notation pour l'intensité d'un courant.

Quelques exemples : 3 + 2i, 5 – i, 2i, –3 sont des nombres complexes.
Pour un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ a est la partie réelle de z et b est la partie imaginaire.

On note alors **Re(z) la partie réelle et Im(z) la partie imaginaire**. Si un nombre complexe z a sa partie imaginaire nulle il s'agit alors d'un nombre réel, si un nombre complexe a sa partie réelle nulle on dit que c'est un **imaginaire pur**.

Bon à savoir : la partie imaginaire n'est pas ib mais b.

1.2. Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

2. Les opérations sur les nombres complexes

2.1. Addition et soustraction de deux nombres complexes

Pour faire la somme de deux nombres complexes il suffit d'additionner les deux parties réelles d'une part et les deux parties imaginaires d'autre part.
Exemple : si $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = -6 + \mathrm{i}$ on a $z_1 + z_2 = (2-6) + \mathrm{i}(3+1) = -4 + 4\mathrm{i}$.
Pour la différence de deux complexes on procède de la même manière que lorsqu'on enlève des parenthèses après un signe moins.
Exemple : avec z_1 et z_2 on a $z_1 - z_2 = (2+3\mathrm{i}) - (6+\mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i} - 6 - \mathrm{i} = -4 + 2\mathrm{i}$.
Remarque : la somme et la différence de deux nombres complexes ont les mêmes propriétés que ces mêmes opérations dans l'ensemble des nombres réels.

2.2. Produit de deux nombres complexes

Pour faire le produit de deux nombres complexes on procède comme lorsque l'on fait un produit de réels en développant et en tenant compte du fait que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On obtient : $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = ac - bd + \mathrm{i}(ad+bc)$.

A1. Identifier la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe

Pour chacun des nombres complexes suivants donner sa partie réelle et sa partie imaginaire.

$z_1 = 3 + 2\mathrm{i};\ z_2 = 5 - 2\mathrm{i};\ z_3 = \mathrm{i}\sqrt{2};\ z_4 = -5;\ z_5 = 1 + \sqrt{2} + 2\mathrm{i};\ z_6 = 1 + 2\mathrm{i} + \sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{2};\ z_7 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$

- **Correction**

Re(z_1) = 3 et Im(z_1) = 2. Re(z_2) = 5 et Im(z_2) = –2. Re(z_3) = 0 et Im(z_3) = $\sqrt{2}$.
Re(z_4) = –5 et Im(z_4) = 0. Re(z_5) = $1+\sqrt{2}$ et Im(z_5) = 2. Re(z_6) = $1+\sqrt{3}$ et

Im(z_6) = $2-\sqrt{2}$. Re(z_7) = $\dfrac{1}{2}$ et Im(z_7) = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

A2. Effectuer la somme ou la différence de deux nombres complexes sous forme algébrique

On considère les nombres complexes $z_1 = 5 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - 3\mathrm{i}$. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

- **Correction**

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (5+2\mathrm{i}) + (1-3\mathrm{i}) \\ &= 5 + 2\mathrm{i} + 1 - 3\mathrm{i} \\ &= 6 - \mathrm{i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (5+2\mathrm{i}) - (1-3\mathrm{i}) \\ &= 5 + 2\mathrm{i} - 1 + 3\mathrm{i} \\ &= 4 + 5\mathrm{i}. \end{aligned}$$

A3. Calculer le produit de deux nombres complexes sous forme algébrique

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. Calculer $z_1 z_2$.

- **Correction**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1+\mathrm{i}\sqrt{2})(\sqrt{3}+\mathrm{i}) \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \mathrm{i}(1+\sqrt{6}). \end{aligned}$$

Sans correction

A4. En utilisant les nombres complexes du A3 calculer $z_1 + z_2;\ z_1^2;\ z_2^2$.

- **Exercices 5 à 12**

LE COURS

La multiplication de deux nombres complexes vérifie les mêmes propriétés que la multiplication de deux nombres réels, y compris les identités remarquables.

2.3. Quotient de deux nombres complexes

2.3.1. Conjugué d'un nombre complexe

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Exemple : le conjugué de $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ est $\overline{z_1} = 2 - 3\mathrm{i}$.

Résultat important :

Si $z = a + \mathrm{i}b$ on a $z\overline{z} = a^2 + b^2$. **Le produit $z\overline{z}$ est donc toujours un réel positif.**

2.3.2. Quotient de deux nombres complexes

Pour calculer le quotient de deux nombres complexes on multiplie son numérateur et son dénominateur par le conjugué de son dénominateur. (On utilise pour le dénominateur le résultat important du paragraphe précédent.)

Exemple :

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}\sqrt{2}} = \frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)} = \frac{1+\sqrt{6}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1+2}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{6}-\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{-1-\sqrt{6}}{3} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3}.$$

2.3.3. Inverse d'un nombre complexe

Pour obtenir l'inverse d'un nombre complexe on procède comme pour calculer un quotient et on obtient : $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{\overline{a+\mathrm{i}b}}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

APPLIQUER

A4. Conjugué d'un nombre complexe

Pour chacun des nombres complexes suivants, donner son conjugué :

$$z_1 = 2+3\mathrm{i} \quad z_2 = 5-\mathrm{i} \quad z_3 = 6 \quad z_4 = 2\mathrm{i}.$$

- **Correction :**

$\overline{z_1} = 2-3i \quad \overline{z_2} = 5+i \quad \overline{z_3} = 6 \quad \overline{z_4} = -2i.$

A5. Effectuer le quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique

Simplifier les nombres complexes suivants : $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$; $\dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}$; $\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$.

- **Correction**

On obtient :

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$$

$$\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} = \frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)(1-\mathrm{i})^2}{2} = \frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)(-\cancel{2}\mathrm{i})}{\cancel{2}} = \sqrt{3}-\mathrm{i}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)}{3-1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

A6. Calculer l'inverse d'un nombre complexe sous forme algébrique

Pour chacun des nombres complexes suivants calculer son inverse sous forme algébrique :

$$z_1 = 1+\mathrm{i} \quad z_2 = 2-3\mathrm{i} \quad z_3 = 6\mathrm{i}.$$

- **Correction**

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{2-3\mathrm{i}} = \frac{2+3\mathrm{i}}{4+9} = \frac{2}{13}+\frac{3}{13}\mathrm{i}$$

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{6\mathrm{i}} = \frac{-6\mathrm{i}}{36} = -\frac{1}{6}\mathrm{i}.$$

Sans correction

A7. Avec les nombres complexes du **A6** calculer $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\dfrac{z_2}{z_3}$ et en déduire $\dfrac{z_1}{z_3}$.

LE COURS

3. Lignes de niveau

3.1. Représentation graphique d'un nombre complexe

Si z est le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels alors on peut lui associer le point M de coordonnées (x, y) dans le plan si celui-ci est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{u}, \vec{v}\right)$. Le point M est alors appelé **image** du nombre complexe z et z est l'**affixe** du point M.

3.1.1. Lignes de niveau

• Lignes de niveau de $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

On appelle ligne de niveau a de $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ l'ensemble des points du plan rapporté au repère orthonormal $\left(O;\ \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'affixe z vérifiant $\mathrm{Re}(z) = a$.

Ces lignes de niveau sont les droites d'équation $x = a$. (Elles sont parallèles à l'axe $\left(O;\ \vec{v}\right)$.)

Exemple : quel est l'ensemble des points du plan images des complexes $z = 2 + \mathrm{i}y$ où y est un réel ? Il s'agit de la ligne de niveau de $\mathrm{Re}(z) = 2$. C'est donc la droite d'équation $x = 2$.

• Lignes de niveau de $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$

Il s'agit ici de l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $\mathrm{Im}(z) = b$. **Ces lignes de niveau sont les droites d'équations $y = b$.** (Elles sont parallèles à l'axe $\left(O;\ \vec{u}\right)$.)

➢ **Exercices 37, 38**

4. Équations du second degré

Rappels des **résultats dans l'ensemble R.**

Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ on calcule d'abord le discriminant du polynôme. On obtient $\Delta = b^2 - 4ac$. Si le discriminant Δ est positif l'équation a deux solutions réelles données par : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Si le discriminant Δ est nul l'équation a une solution « double » donnée par : $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

On peut résoudre aussi cette équation **dans l'ensemble C des nombres complexes.** Pour le discriminant Δ positif ou nul on obtient les mêmes résultats que dans **R** et nous admettrons que :

Pour Δ négatif l'équation admet deux solutions complexes conjuguées données par :

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

A8. Résolution d'une équation du second degré dans C

Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes les équations suivantes :

$$(E_1)\quad z^2+2z+2=0$$

$$(E_2)\quad z^2+z+1=0.$$

Pour cette deuxième équation montrer qu'une des deux solutions est le carré de l'autre.

➢ **Correction**

Pour (E_1) : on obtient $\Delta=-4$ donc l'équation admet deux solutions complexes

$$z_1=\frac{-2-2\mathrm{i}}{2}=-1-\mathrm{i} \text{ et } z_2=\frac{-2+2\mathrm{i}}{2}=-1+\mathrm{i}\,.$$

L'ensemble des solutions est donc $S=\{-1+\mathrm{i};-1-\mathrm{i}\}$.

Pour (E_2) : le discriminant vaut –3 et on obtient $z_1=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

On a alors $S=\left\{\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

On remarque que

$$\left(\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1+2\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $z_1^{\,2}=z_2$. A-t-on aussi $z_2^{\,2}=z_1$?

Sans correction

A9. Résoudre dans C les équations suivantes :

$(E_1)\quad (z-2+3\mathrm{i})(z+\mathrm{i})=0$

$(E_2)\quad -2z^2+2z-1=0$

$(E_3)\quad z^2-4z+8=0.$

➢ **Exercices 22 à 25**

LE COURS

5. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

5.1. Module et argument d'un nombre complexe

Si le nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ a pour image le point M dans le plan, alors on appelle module de z la distance OM. Ce module est noté $|z|$ et on obtient $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, on appelle argument de z **si z n'est pas nul** et on note arg(z) une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. Si on note θ cet argument on a $\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$.

Dans ce cas le nombre complexe z peut s'écrire $z = |z|\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$.

On le note aussi $z = \left[|z|, \theta\right]$.

Le dernier résultat obtenu s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Remarque importante : $|z|^2 = z.\bar{z}$

➢ **Rappel : valeurs remarquables**

$\theta(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

5.1.1. Opérations sur les nombres complexes écrits sous forme trigonométrique

Si les deux nombres complexes z_1 et z_2 s'écrivent :

$z_1 = |z_1|\left(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1\right)$ et $z_2 = |z_2|\left(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2\right)$ on a alors :

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ et $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$; $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$.