Analyse 1

Nombres réels – Bornes supérieure/inférieure – Arithmétique

On dit qu'une partie G non vide de $\mathbb{R}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ si :

- $\forall (x, x') \in G^2$, $x + x' \in G$ (G est stable par addition) ;
- $\forall x \in G$, $-x \in G$.

Pour tout réel α, on pose $\alpha\mathbb{Z} = \{n\alpha, n \in \mathbb{Z}\}$.

Enfin, on dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a $A \cap [a, b] \neq \varnothing$.

L'objet de cet exercice est de prouver que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

2) Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

   a. Prouver que $0 \in G$.

   b. Prouver que $\forall (x, y) \in G^2$, $x - y \in G$.

   c. Montrer que $\forall \alpha \in G$, $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

   d. Prouver que si $G \neq \{0\}$, alors $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide et justifier que $\alpha = \inf (G \cap \mathbb{R}_+^*)$ existe et est positif ou nul.

Dans la suite, on considère G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ et on pose $\alpha = \inf (G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

3) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 0$.

   a. Justifier l'existence de $x_o \in G$ tel que $\alpha \leq x_o < 2\alpha$.

   b. Prouver que si $x_o \neq \alpha$, alors il existe $x_1 \in G$ tel que $\alpha \leq x_1 < x_o$ et en déduire que $\alpha \in G$.

   c. Montrer qu'alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.

4) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

   a. Justifier l'existence de $x_o \in G$ tel que $0 < x_o < b - a$.

   b. Montrer qu'il existe un entier compris entre $\dfrac{a}{x_o}$ et $\dfrac{b}{x_o}$.

   c. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Analyse 1 : Corrigé

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha\mathbb{Z}$ est clairement non vide (il contient α).

D'après la définition donné dans l'énoncé, prouver que $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ revient à prouver que $\forall (x, x') \in (\alpha\mathbb{Z})^2$, $-x \in \alpha\mathbb{Z}$ et $x + x' \in \alpha\mathbb{Z}$.

Soit $(x, x') \in (\alpha\mathbb{Z})^2$. Il existe $(n, n') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = n\alpha$ et $x' = n'\alpha$. Alors :

- $-x = -n\alpha = (-n)\alpha$ et comme $-n \in \mathbb{Z}$, on a $-x \in \alpha\mathbb{Z}$;
- $x + x' = n\alpha + n'\alpha = (n + n')\alpha$ et comme $n + n' \in \mathbb{Z}$, on a $(n + n')x \in \alpha\mathbb{Z}$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe additif de } \mathbb{R}.}$$

2) a. Par définition, G est non vide donc il existe G contient un élément x.

Alors, $-x \in G$ et $x + (-x) \in G$. Comme $x + (-x) = 0$, on a bien :

$$\boxed{0 \in G}$$

b. $\forall (x, y) \in G^2$, on a $-y \in G$, donc $x + (-y) \in G$, soit :

$$\boxed{\forall (x, y) \in G^2,\ x - y \in G.}$$

c. Soit $\alpha \in G$. Prouver que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ revient à prouver que $\forall n \in \mathbb{Z},\ n\alpha \in G$.

Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ n\alpha \in G$.

- On a $0\alpha = 0 \in G$ d'après la question a. Donc, la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.
  Par hypothèse de récurrence, $n\alpha \in G$ et comme $\alpha \in G$, $n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha \in G$.
  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$:

- si $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et donc $n\alpha \in G$ d'après ce que l'on vient de voir ;
- si $n < 0$, $-n \in \mathbb{N}$ donc $(-n)\alpha \in G$ et $-(-n)\alpha = n\alpha \in G$.

Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n\alpha \in G$, soit :

$$\boxed{\alpha\mathbb{Z} \subset G}$$

d. Si $G \neq \{0\}$, alors $\exists\, x \in G$ tel que $x \neq 0$.

- Si $x > 0$, alors $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$.
- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et $-x \in G$, donc $-x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$.

Dans les deux cas, on a trouvé un élément de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\boxed{G \cap \mathbb{R}_+^* \text{ est non vide.}}$$

Alors, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, incluse dans $\mathbb{R}_+^*$ donc minorée par 0. Ceci prouve que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure α. De plus, comme G est minorée par 0 et α est le plus grand minorant de G, on a $\alpha \geq 0$.

Finalement :

$$\boxed{\alpha = \inf\,(G \cap \mathbb{R}_+^*) \text{ existe et est positif ou nul.}}$$

3) a. Comme $\alpha = \inf\,(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, on a $\forall\, x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \leq x$.

Supposons qu'il n'existe pas de $x_o \in G$ tel que $\alpha \leq x_o < 2\alpha$. Alors, $\forall\, x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, $x \geq 2\alpha$. Ceci implique que 2α minore $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $2\alpha \leq \alpha$ (car α est le plus grand minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$). Comme $\alpha > 0$, ceci est absurde et donc :

$$\boxed{\exists\, x_o \in G \text{ tel que } \alpha \leq x_o < 2\alpha.}$$

b. D'après la caractérisation de la borne inférieure :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in G \cap \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \alpha \leq x < \alpha + \varepsilon.$$

Si $x_o \neq \alpha$, alors $x_o > \alpha$ et on peut prendre $\varepsilon = x_o - \alpha > 0$. Il existe alors $x_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\alpha \leq x_1 < \alpha + x_o - \alpha = x_o.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } x_1 \in G \text{ tel que } \alpha \leq x_1 < x_o.}$$

Si $x_o \neq \alpha$, nous avons trouvé deux éléments de G, x_o et x_1 tels que $\alpha \leq x_1 < x_o < 2\alpha$.

D'après la question 2.a., $x_o - x_1 \in G$. Or :

$$\alpha \leq x_1 < x_o < 2\alpha \;\Rightarrow\; 0 < x_o - x_1 < 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

Ainsi, $x_o - x_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $x_o - x_1 < \alpha$. Ceci est absurde car $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, donc :

$$\underline{x_o = \alpha.}$$

Or, $x_o \in G$, donc :

$$\boxed{\alpha \in G}$$

c. Comme $\alpha \in G$, on a déjà $\underline{\alpha\mathbb{Z} \subset G}$ d'après la question 2.c. Reste à prouver l'inclusion réciproque.

Soit $x \in G$. Posons $n = E\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$. On a :

$$n \leq \frac{x}{\alpha} < n+1 \;\Leftrightarrow\; n\alpha \leq x < n\alpha + \alpha \;\Rightarrow\; 0 \leq x - n\alpha < \alpha.$$

D'après ce que l'on vient de voir, $n\alpha \in G$ et comme $x \in G$, $n\alpha - x \in G$ d'après 2.b.

Alors, si $n\alpha - x \neq 0$, on a $n\alpha - x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $x - n\alpha < \alpha$, ce qui est absurde car $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

Ainsi, $n\alpha - x = 0$ et donc $x = n\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$. Ceci prouve que $\underline{G \subset \alpha\mathbb{Z}}$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{G = \alpha\mathbb{Z}}$$

4) a. On a ici $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$. Alors, d'après la caractérisation de la borne inférieure, on a ici :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in G \cap \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } 0 \leq x < \varepsilon.$$

Comme le x ci-dessus doit être dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut reformuler en :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in G \text{ tel que } 0 < x < \varepsilon.$$

En posant $\varepsilon = b - a > 0$, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\exists x_o \in G \text{ tel que } 0 < x_o < b - a.}$$

b. On a alors $1 < \dfrac{b-a}{x_o}$, soit $\dfrac{b}{x_o} - \dfrac{a}{x_o} > 1$ et donc :

$$\boxed{\text{Il existe au moins un entier compris entre } \dfrac{a}{x_o} \text{ et } \dfrac{b}{x_o}.}$$

c. Soit n un entier compris entre $\dfrac{a}{x_o}$ et $\dfrac{b}{x_o}$. On a alors $\dfrac{a}{x_o} \leq n \leq \dfrac{b}{x_o}$, soit :

$$a \leq nx_o \leq b \iff nx_o \in [a, b].$$

Or, d'après la question 2.c. $x_o \in G$ implique $nx_o \in G$.

Ainsi, $nx_o \in [a, b]$ et $nx_o \in G$, soit $nx_o \in G \cap [a, b]$.

Nous venons donc de prouver que $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a $G \cap [a, b] \neq \varnothing$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

Analyse 2

Fonctions usuelles – Etude de fonction

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\arccos(\sin x)+\arcsin(\cos x)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier.
2) Montrer que f est périodique et donner une période de f.
3) Prouver que $\forall\, t\in[-1;1],\ \arccos(t)+\arcsin(t)=\dfrac{\pi}{2}$.
4) Montrer que $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\pi-f(x)$ et en déduire que $\mathscr{C}$ possède un centre de symétrie que l'on précisera.
5) Evaluer $f\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$ et en déduire que la droite d'équation $x=\dfrac{3\pi}{4}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
6) Donner une expression simple de f(x) sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, puis sur $\left[-\dfrac{\pi}{4};0\right]$.
7) Construire alors la courbe $\mathscr{C}$ en justifiant les étapes de construction.

Analyse 2 : Corrigé

1) Les fonctions arccosinus et arcsinus sont définies sur $[-1;1]$. Or, les fonctions cosinus et sinus sont à valeurs dans $[-1;1]$ donc :

$$\boxed{\text{f est définie sur } \mathbb{R}.}$$

2) Les fonctions cosinus et sinus étant 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{f est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

3) Cette question est une question de cours. Posons $g(t) = \arccos(t) + \arcsin(t)$.

La fonction g est définie, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$ en tant que somme de telles fonctions. $\forall\, t \in]-1;1[$, $g'(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ donc g est constante sur $]-1;1[$. Comme elle est continue sur $[-1;1]$, elle est constante sur cet intervalle.

Enfin, $g(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\forall\, t \in [-1;1]$:

$$\boxed{\arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}}$$

4) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \arccos(\cos x) + \arcsin(\sin x)$$

Or, d'après la question précédente, $\forall\, t \in [-1;1]$:

$$\arccos(t) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(t) \text{ et } \arcsin(t) = \frac{\pi}{2} - \arccos(t).$$

Donc :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos x)\right] + \left[\frac{\pi}{2} - \arccos(\sin x)\right] = \pi - \arcsin(\cos x) - \arccos(\sin x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - f(x).}$$

On a alors $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$f\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) = \pi - f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \pi - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

La fonction f vérifie donc une relation du type $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x + a) + f(x + a) = 2b$$

avec $a = \dfrac{\pi}{4}$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le point A de coordonnées } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ est centre de symétrie de } \mathscr{C}.}$$

5) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) &= \arccos\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right)+\arcsin\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right) \\ &= \arccos(-\cos x)+\arcsin(-\sin x) \\ &= \pi-\arccos(\cos x)-\arcsin(\sin x) \\ &= \pi-\frac{\pi}{2}+\arcsin(\cos x)-\frac{\pi}{2}+\arccos(\sin x) \\ &= \arcsin(\cos x)+\arccos(\sin x) \end{aligned}$$

Soit $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=f(x)}$$

En remplaçant x par $x+\frac{3\pi}{4}$ dans la formule ci-dessus, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{3\pi}{2}-\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right)=f\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad f\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(x+\frac{3\pi}{4}\right).$$

La fonction f vérifie donc une relation du type :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x+a)=f(x+a)$$

avec $a=\frac{3\pi}{4}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La droite } D \text{ d'équation } x=\frac{3\pi}{4} \text{ est axe de symétrie de } \mathscr{C}.}$$

6) D'après les relations données au début de la question 4, on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin x)+\frac{\pi}{2}-\arccos(\cos x)=\pi-\arcsin(\sin x)-\arccos(\cos x).$$

Alors :

- $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a $\arccos(\cos x)=x$ et $\arcsin(\sin x)=x$ donc $f(x)=\pi-2x$;
- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4};0\right]$, on a $\arccos(\cos x)=-x$ et $\arcsin(\sin x)=x$ donc $f(x)=\pi$.

Finalement :

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} \pi-2x & \text{sur } \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \\ \pi & \text{sur } \left[-\frac{\pi}{4};0\right] \end{cases}}$$