# Chapitre 1.
# Rédiger et raisonner

## I Énoncés mathématiques

Pour s'exprimer en mathématiques, on utilise des phrases appelées énoncés et classées en différents types :
1- une **définition** nomme, construit ou explique un nouvel objet mathématique : par exemple « on appelle carré du réel $x$ le nombre réel, noté $x^2$, qui vaut $x \times x$ ».
2- une **notation** introduit un objet, une variable ou un symbole : par exemple « soit $n$ un entier naturel » ou « on pose $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ ».
3- une **proposition** est une caractéristique qui est soit vraie soit fausse : par exemple « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » ou « $\ln(x) > 0$ ». Lorsque la proposition est vraie, on parle de propriété.

*Remarque* : On voit dans le dernier exemple que les propositions peuvent dépendre de variables dont la valeur les rend soit vraies soit fausses. Il sera donc important de toujours introduire les variables ou objets mathématiques utilisés.

Pour écrire ces énoncés, deux quantificateurs peuvent nous aider :
1- $\forall$ **se lit « pour tout »** ou « quel que soit » ou « pour n'importe lequel ». Tous les éléments suivant ce quantificateur devront vérifier la proposition écrite ensuite.
2- $\exists$ **se lit « il existe au moins un »**. La proposition écrite ensuite sera vérifiée par au moins un élément introduit par ce quantificateur. Attention tous les éléments ne la vérifieront pas obligatoirement : en tout cas, un de ces éléments rendra la proposition vraie. Cet élément n'est d'ailleurs pas forcément seul : la précision $\exists!$ signifie « il existe un unique élément ».

*Exemple 1* : On note $G$ l'ensemble des garçons et $F$ l'ensemble des filles de la classe prépa ECE notée $C$. Lorsque deux étudiants de $C$ sont en relation d'amitié, on note : $x \equiv y$ ; sinon, on note : $x \not\equiv y$ .
Les phrases suivantes peuvent se traduire sous forme de proposition mathématique :

| | | |
|---|---|---|
| a- « Tous les étudiants sont amis. » | $\forall x \in C, \forall y \in C,$ | $x \equiv y$ |
| b- « Deux des garçons ne sont pas amis. » | $\exists x \in G, \exists y \in G,$ | $x \not\equiv y$ |
| c- « Chaque étudiant est ami avec une fille. » | $\forall x \in C, \exists y \in F,$ | $x \equiv y$ |
| d- « Une fille est amie avec tous les étudiants. » | $\exists y \in F, \forall x \in C,$ | $y \equiv x$ |

*Remarque* : Reprenons les deux dernières propositions de cet exemple. Dans la proposition « $\forall x \in C, \exists y \in F, x \equiv y$ », les étudiants peuvent avoir une amie différente ; par contre dans la proposition « $\exists y \in F, \forall x \in C,\ y \equiv x$ », il s'agit de la même fille qui est amie avec tous les étudiants.
L'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est donc important : un objet dépend de tous les objets introduits avant lui.

*Exemple 2* : Comparer les propositions $A_i$ et $B_i$ pour $i = 1, 2$ et 3.
a- $A_1$ « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ » et
$B_1$ « $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ »
$A_1$ et $B_1$ sont vraies et signifient la même chose : on dira qu'elles sont équivalentes et on notera $A_1 \Leftrightarrow B_1$ .

b- $A_2$ « $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$ » et $B_2$ « $\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$ »
$A_2$ et $B_2$ sont vraies et équivalentes. Certes l'égalité $y = x^2$ n'est pas vraie pour tous les réels $x$ et $y$ mais on peut trouver au moins un réel $x$ et un réel $y$ qui la vérifie.

c- $A_3$ « $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x < y$ » et $B_3$ « $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}, x < y$ »
$A_3$ est fausse pour $y = x - 1$ (en effet $y$, introduit après $x$, peut dépendre de $x$). Par contre $B_3$ est vraie pour $x = y - 1$ (de même $x$, introduit après $y$, peut dépendre de $y$).

*Remarque* : Il est interdit d'utiliser les quantificateurs à des fins d'abréviation ou dans des phrases rédigées en français.

Pour construire de nouvelles propositions, on peut utiliser certains connecteurs.

**Définition 1** : Soit $P$ et $Q$ deux propositions.
La proposition $P$ ou $Q$ est vraie seulement lorsque soit $P$ est vraie, soit $Q$ est vraie, soit $P$ et $Q$ sont vraies.
La proposition $P$ et $Q$ est vraie seulement lorsque $P$ et $Q$ sont vraies.
La proposition $\text{non } P$ est vraie seulement lorsque $P$ est fausse.

*Exemple 3* : Donner la négation des phrases suivantes.

| | |
|---|---|
| a- « Les étudiants ont khôlle ou LV2 ce matin. » | « Les étudiants n'ont ni khôlle ni LV2 ce matin. » |
| b- « Le temps est ensoleillé et sec. » | « Le temps est nuageux ou humide. » |
| c- « La solution est supérieure ou égale à 3 ou strictement inférieure à $-1$. » | « La solution est strictement inférieure à 3 et supérieure ou égale à $-1$. » |
| d- « La solution est un entier pair. » | « La solution n'est pas un entier ou est un entier impair. » |

*Remarque* : Dans une négation, la nature des connecteurs ou et et s'inverse.

*Exemple 4* : On reprend l'exemple 1 et on passe à la négation les propositions.

| | |
|---|---|
| a- « Tous les étudiants sont amis. » $\forall x \in C, \forall y \in C, \quad x \equiv y$ | « Il existent deux étudiants qui ne sont pas amis. » $\exists x \in C, \exists y \in C, \quad x \not\equiv y$ |
| b- « Deux des garçons ne sont pas amis. » $\exists x \in G, \exists y \in G, \quad x \not\equiv y$ | « Tous les garçons sont amis. » $\forall x \in G, \forall y \in G, \quad x \equiv y$ |
| c- « Chaque étudiant est ami avec une fille. » $\forall x \in C, \exists y \in F, \quad x \equiv y$ | « Un étudiant est ami avec aucune fille. » $\exists x \in C, \forall y \in F, \quad x \not\equiv y$ |
| d- « Une fille est amie avec tous les étudiants. » $\exists y \in F, \forall x \in C, \quad y \equiv x$ | « À chaque fille correspond un étudiant avec lequel elle n'est pas amie. » $\forall y \in F, \exists\, x \in C, \quad y \not\equiv x$ |

*Remarque* : Dans une négation, la nature des quantificateurs ∀ et ∃ s'inverse.

**Point méthode 1** : **Utilisation d'un contre-exemple**
La négation d'une proposition commençant par ∀ peut être démontrée par l'utilisation d'un contre-exemple.

*Exemple 5* : On montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n$ entier naturel, n'est pas monotone à partir de n'importe quel rang.
On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un rang lorsque :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \leq u_{n+1}$$

Dans cet exemple, on veut donc démontrer la négation de cette proposition, c'est-à-dire :

$$\forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0, u_n > u_{n+1}$$

Soit alors $N_0$ un entier naturel quelconque. On cherche un contre-exemple c'est-à-dire un entier $n$ supérieur à $N_0$ tel que $u_n > u_{n+1}$ .
$n$ étant introduit après $N_0$, on peut l'écrire en fonction de $N_0$ : on prend $n = 2N_0$ .
On a bien $n \geq N_0$ et comme $u_{2N_0} = (-1)^{2N_0} = 1$ et $u_{2N_0+1} = (-1)^{2N_0+1} = -1$ , on obtient $u_n > u_{n+1}$ .
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante à partir de n'importe quel rang. On procède de la même façon pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante à partir de n'importe quel rang.

# II Éléments de calculs algébriques

## II.1 Quotient

**Définition 2** : Soit $x, y$ deux nombres réels avec $y$ non nul.
$\frac{1}{y}$ ou $y^{-1}$ est le nombre réel non nul tel que $y \times \frac{1}{y} = y \times y^{-1} = 1$ .
$\frac{x}{y}$ est le nombre réel défini par $x \times \frac{1}{y}$ .

**Propriété 1** : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^*$

a) $x \times \frac{z}{y} = \frac{x \times z}{y} = z \times \frac{x}{y}$ b) $\frac{x}{y} \times \frac{z}{t} = \frac{x \times z}{y \times t}$ c) $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{x \times t + y \times z}{y \times t}$

d) $\frac{\frac{z}{t}}{y} = \frac{z}{y \times t}$ e) pour $z \neq 0$, $\frac{y}{\frac{z}{t}} = \frac{y \times t}{z}$

*Exemple 6* : a- Pour tout $x$ réel :

$$-\frac{2+x}{2-2\sqrt{2}} = \frac{-2-x}{2-2\sqrt{2}} = \frac{2+x}{-2+2\sqrt{2}} = \frac{1+\frac{x}{2}}{-1+\sqrt{2}}$$

b- Pour tout $n$ entier naturel :

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)+(2n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

## II.2 Puissances entières

**Définition 3** : Soit $x$ un nombre réel et $n$ un entier.
Pour $n = 0$, on pose $x^0 = 1$ .
Pour $n > 0$, on pose $x^n = x \times x \times \ldots \times x$ avec $n$ facteurs égaux à $x$.
Pour $n < 0$ et $x \neq 0$ , on pose $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ .
En particulier $x^1 = x$ et, pour $x \neq 0$ , $x^{-1} = \frac{1}{x}$ .

**Propriété 2** : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

a) $x^n \times x^m = x^{n+m}$ b) $(x \times y)^n = x^n \times y^n$ c) $(x^n)^m = x^{n \times m}$

De plus pour $y \neq 0$,

d) $y^{-n} = \frac{1}{y^n} = \left(\frac{1}{y}\right)^n$ e) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ f) $\frac{y^n}{y^m} = y^{n-m} = \frac{1}{y^{m-n}}$

*Exemple 7* : Pour tout $n$ entier naturel non nul :

$0^n = 0$ $1^n = 1$ $(-1)^{2n} = 1$ $(-1)^{2n+1} = -1$

$$\frac{12^{2n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{9^{n+1} \times 8^{n+2}} = \frac{3^{2n} \times 2^{4n} \times 2^{-n+2}}{3^{2n+2} \times 2^{3n+6}} = \frac{1}{3^2 \times 2^4} = \frac{1}{144}$$

## II.3 Racine carrée

**Définition 4** : Soit $x$ un nombre réel positif.
$\sqrt{x}$ ou $x^{1/2}$ est le nombre réel positif tel que $(\sqrt{x})^2 = (x^{1/2})^2 = x$ .

**Propriété 3** : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+$

a) $\sqrt{x^2} = x$ b) $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ c) pour $y \neq 0$, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

*Remarques* : 1/ La propriété 3 a) n'est valable que pour $x$ positif.
2/ On ne peut rien dire sur $\sqrt{x+y}$ : en particulier, ce n'est pas toujours égal à $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ .

*Exemple 8* : a-

$$\sqrt{8}=2\sqrt{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\sqrt{12+\sqrt{2}}}{2}=\sqrt{\frac{12+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{3+\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

b- Pour tout $a \in ]2,+\infty[$

$$\begin{aligned}
\frac{a+2\sqrt{a-1}}{(a-2)^2} &= \frac{\left(a+2\sqrt{a-1}\right)\left(a-2\sqrt{a-1}\right)}{(a-2)^2\left(a-2\sqrt{a-1}\right)} && \text{avec } a-2\sqrt{a-1}\neq 0 \text{ car } a>2 \\
&= \frac{a^2-4\sqrt{a-1}^2}{(a-2)^2\left(a-2\sqrt{a-1}\right)} \\
&= \frac{a^2-4a+4}{(a-2)^2\left(a-2\sqrt{a-1}\right)} && \text{car } a-1>0 \\
&= \frac{1}{\left(a-2\sqrt{a-1}\right)}
\end{aligned}$$

**Propriété 4** : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}^{+*}$
a) $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ b) $x^2=k \Leftrightarrow x=\sqrt{k} \text{ ou } x=-\sqrt{k}$

## II.4 Exponentielle, logarithme

On verra plus tard la définition de l'exponentielle et du logarithme népérien.

**Propriété 5** : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$
a) $\mathrm{e}^0=1, \mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ b) $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$ c) $\mathrm{e}^{-y}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^y}$
d) $\mathrm{e}^{x-y}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ e) $\forall n \in \mathbb{Z}, (\mathrm{e}^x)^n=\mathrm{e}^{nx}$

**Propriété 6** : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}$
a) $\ln(1)=0, \ln(\mathrm{e})=1$ b) $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$
c) $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\ln(y)$ d) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
e) $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n)=n\ln(x)$

*Remarque* : On peut ainsi écrire $\ln(x^2)=2\ln(x)$ : mais ceci n'est valable que pour $x>0$ .

**Propriété 7** : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}$,
a) $x=\ln(y) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=y$
b) $\ln(\mathrm{e}^x)=x$
c) $\mathrm{e}^{\ln(y)}=y$

## II.5 Puissance réelle

On va définir ici un exposant non plus forcément entier mais réel quelconque.

**Définition 5** : Soit $x$ un nombre réel strictement positif et $a$ un nombre réel.
On pose
$$x^a = \mathrm{e}^{a \times \ln(x)}$$

*Remarques* : On peut ainsi par exemple définir $2^{0,1}$ par $\mathrm{e}^{0,1\times\ln(2)}$.

**Propriété 8** : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}$

a) $x^a \times x^b = x^{a+b}$ b) $(x \times y)^a = x^a \times y^a$ c) $(x^a)^b = x^{a\times b}$

d) $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^a$ e) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b} = \dfrac{1}{x^{b-a}}$

## II.6 Valeur absolue

**Définition 6** : Soit $x$ un nombre réel.
$|x|$ est le nombre réel positif qui vaut $x$, si $x$ est positif, et $-x$, si $x$ est négatif.

*Exemple 9* :

$|5| = 5$ $|2{,}1| = 2{,}1$ $|-5| = 5$ $|-2{,}1| = 2{,}1$

$|1+\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$ $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$

**Propriété 9** : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

a) $|x| \times |y| = |xy|$ b) $|-x| = |x|$ c) pour $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

*Remarque* : On ne peut rien dire sur $|x+y|$ : en particulier, ce n'est pas toujours égal à $|x| + |y|$ .

**Propriété 10** : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}^{+*}$

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ b) $|x| = k \Leftrightarrow x = k \text{ ou } x = -k$

La valeur absolue permet de généraliser certaines propriétés avec les racines carrées et le logarithme népérien.

**Propriété 11** :

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$ b) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\ln(x^2) = 2\ln|x|$

### II.7 Partie entière

**Définition 7** : Soit $x$ un nombre réel.
On appelle partie entière de $x$ le seul entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .

*Remarque* : Concrètement, la partie entière de $x$ est l'entier positif ou négatif immédiatement inférieur à $x$.

*Exemple 10* :
$\lfloor 5 \rfloor = 5$ $\lfloor 2{,}1 \rfloor = 2$ $\lfloor -5 \rfloor = -5$ $\lfloor -2{,}1 \rfloor = -3$

## III Différents raisonnements en mathématiques

### III.1 Raisonnement par disjonction de cas

Pour montrer une propriété sur une ou plusieurs variables réelles, on peut fragmenter notre raisonnement en différents cas qui devront recouvrir toutes les valeurs possibles prises par ces variables.

*Exemple 11* : Résoudre $|2x - 4| = |x + 3| + 1$ pour $x$ réel.
Pour résoudre cette équation, nous allons simplifier les valeurs absolues : celles-ci dépendent du signe de $2x - 4$ et de $x + 3$ .
1$^{er}$ cas : on raisonne pour $x \geq 2$ .
Dans ce cas, $2x - 4 \geq 0$ et $x + 3 \geq 0$ , d'où $|2x - 4| = 2x - 4$ et $|x + 3| = x + 3$ .
Ainsi on est amené à résoudre pour $x \geq 2$ :

$$|2x - 4| = |x + 3| + 1 \Leftrightarrow 2x - 4 = x + 4 \Leftrightarrow x = 8$$

De plus comme $8 \geq 2$ , 8 est une solution.
2$^{e}$ cas : on raisonne pour $-3 \leq x < 2$ .
Dans ce cas, $2x - 4 < 0$ et $x + 3 \geq 0$ , d'où $|2x - 4| = -2x + 4$ et $|x + 3| = x + 3$ .
Ainsi on est amené à résoudre pour $-3 \leq x < 2$ :

$$|2x - 4| = |x + 3| + 1 \Leftrightarrow -2x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x = 0$$

De plus comme $-3 \leq 0 < 2$ , 0 est une solution.
3$^{e}$ cas : on raisonne pour $x < -3$ .
Dans ce cas, $2x - 4 < 0$ et $x + 3 < 0$ , d'où $|2x - 4| = -2x + 4$ et $|x + 3| = -x - 3$ .
Ainsi on est amené à résoudre pour $x < -3$ :

$$|2x - 4| = |x + 3| + 1 \Leftrightarrow -2x + 4 = -x - 2 \Leftrightarrow x = 6$$

Or ici $6 \nless -3$ : 6 n'est pas une solution.
Comme nous avons raisonné sur tout le panel des valeurs possibles pour $x$, les solutions de l'équation sont $8$ et $0$.

## III.2 Raisonnement par implication

**Définition 8** : Soit $P$ et $Q$ deux propositions.
On dit que $P$ implique $Q$ (noté $P \Longrightarrow Q$) lorsque si $P$ est vraie, alors $Q$ devient vraie.

*Remarque* : Par exemple, pour les propositions $P$ « il pleut » et $Q$ « la route est mouillée », on peut dire que $P$ implique $Q$ : en effet si il pleut, alors la route devient mouillée. L'implication a en effet un sens de cause à conséquence ou d'hypothèse à conclusion.
Dans cet exemple, l'implication peut également se formuler par « il suffit qu'il pleuve pour que la route soit mouillée » ou « quand il pleut, la route est nécessairement mouillée ». Cette remarque nous amène à la définition suivante.

**Définition 9** : Soit $P$ et $Q$ deux propositions.
Lorsque $P$ implique $Q$, $P$ est appelée condition suffisante de $Q$ et $Q$ condition nécessaire de $P$ .

*Exemple 12* : Donner une condition suffisante puis une condition nécessaire aux propositions $P$ suivantes pour $x$ réel.
a- $P$ « $|x+2| = x+2$ »
$x+2 \geq 0$ est une condition suffisante et une condition nécessaire de $|x+2| = x+2$ .
b- $P$ « $x^2 > 9$ »
$x > 3$ est une condition suffisante de $x^2 > 9$ . Attention elle n'est pas nécessaire.
$(x > 3 \text{ ou } x < -3)$ est une condition nécessaire de $x^2 > 9$ .

*Remarque* : Dans une implication, l'ordre des propositions est en effet important. Reprenons les propositions $P$ « il pleut » et $Q$ « la route est mouillée ». On a bien que $P$ implique $Q$ mais $Q$ n'implique pas forcément $P$ : la route peut être mouillée avec un temps ensoleillé car un camion-citerne s'est renversé.

**Définition 10** : Soit $P$ et $Q$ deux propositions.
L'implication $Q \Longrightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$ .

*Remarque* : La remarque précédente entraine que si une implication est vraie, alors son implication réciproque n'est pas forcément vérifiée.

**Point méthode 2** : **Établir une implication**
Pour établir une implication $P \Longrightarrow Q$ , il convient de bien identifier les variables avec leur quantificateur éventuel en jeu, ensuite de partir de $P$ comme hypothèse, de l'exploiter pour arriver à $Q$ comme conclusion en étant vigilant sur la cohérence des passages d'une étape à l'autre.