Exercice 58 (Billard circulaire)

On considère un billard circulaire de rayon 1 identifié au disque unité du plan complexe, dont le centre (le point d'affixe 0) est noté O. Le bord du billard correspond donc à l'ensemble des nombres complexes de module 1, noté $\mathbb{U}$.
On tire une boule (supposée ponctuelle) à partir du point d'affixe $x_0 = 1$. La boule rebondit ensuite aux points d'affixes x_1, x_2, … suivant la loi de Snell-Descartes, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'angle d'incidence en x_k de la trajectoire de la boule par rapport à la normale à $\mathbb{U}$ en x_k est égal à son angle de réflexion (voir figure 1). On obtient ainsi une suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathbb{U}$; pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle M_k le point d'affixe x_k. On note enfin I l'ensemble des points de rebond de la boule : $I = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

a) Montrer que I est l'ensemble des racines n-èmes de l'unité pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ ou est dense dans $\mathbb{U}$.

b) Montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $\rho < 1$, appelé *cercle caustique*, tel que chaque segment $[M_kM_{k+1}]$ de la trajectoire de la boule soit tangent à $\mathcal{C}$.

302, 304, 323, 330, 340, 354

Correction :

a) Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right[$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{M_0O},\, \overrightarrow{M_0M_1})$. Le triangle OM_0M_1 est isocèle en O, donc, compte tenu de l'orientation, une mesure de $(\overrightarrow{OM_0},\, \overrightarrow{OM_1})$ est $\theta = \pi + 2\alpha$ (voir figure 1).
Fixons $k \in \mathbb{N}$. La loi de Snell-Descartes implique que les triangles OM_kM_{k+1} et $OM_{k+1}M_{k+2}$ sont isométriques. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'angle orienté $(\overrightarrow{OM_k},\, \overrightarrow{OM_{k+1}})$ a pour mesure θ, donc que $x_{k+1} = e^{i\theta}x_k$. Finalement :

$$I = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\} = \{e^{ik\theta},\ k \in \mathbb{N}\}$$

Introduisons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & (\mathbb{R},\, +) & \to & (\mathbb{U},\, \times) \\ & x & \mapsto & e^{ix} \end{array}$$

C'est un morphisme de groupes continu et surjectif, et on a $I = \Gamma(\theta\mathbb{N})$. Intéressons-nous à la partie $\Gamma^{-1}(I)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x \in \Gamma^{-1}(I) &\Leftrightarrow \Gamma(x) \in I \\ &\Leftrightarrow \Gamma(x) \in \Gamma(\theta\mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ / \ e^{ix} = e^{ik\theta} \\ &\Leftrightarrow \exists (k,\, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \ / \ x = k\theta + k'2\pi \\ &\Leftrightarrow x \in \theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

On en déduit que $\Gamma^{-1}(I) = \theta\mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z}$. La surjectivité de Γ donne $I = \Gamma(\Gamma^{-1}(I))$ donc $I = \Gamma(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z})$.

La partie $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ est stable par somme et contient un élément strictement positif et un élément strictement négatif. On peut donc appliquer le résultat de l'exercice 13 qui nous apprend qu'elle est dense dans $\mathbb{R}$ ou bien de la forme $a\mathbb{Z}$. On va voir que le premier cas se produit quand $\theta/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$ et le deuxième quand $\theta/(2\pi) \in \mathbb{Q}$.

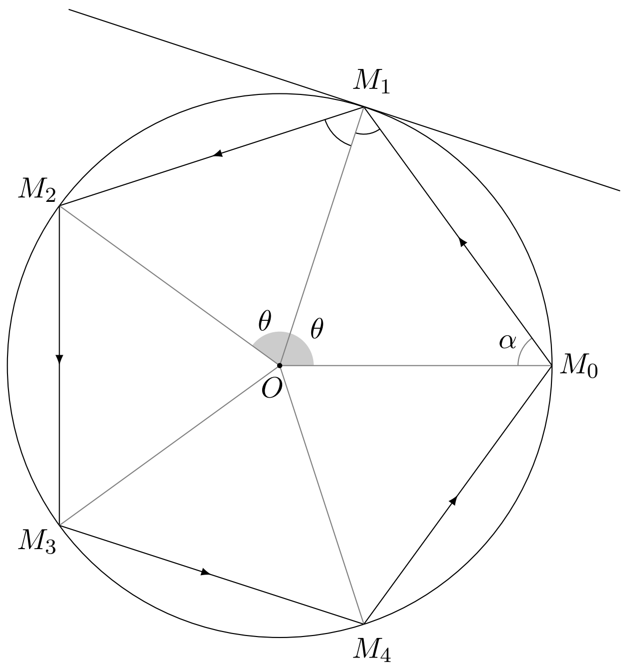

FIGURE 1 – Cas polygonal.

$*$ Supposons pour commencer que $\theta/(2\pi) \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{n}{m}$. On a alors :

$$\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} = 2\pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\,\mathbb{N} + \mathbb{Z}\right) = 2\pi\left(\frac{n}{m}\,\mathbb{N} + \mathbb{Z}\right) = \frac{2\pi}{m}\,(n\mathbb{N} + m\mathbb{Z})$$

Or $n\mathbb{N}+m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. L'inclusion $n\mathbb{N}+m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ est claire. Pour montrer l'inclusion réciproque prenons $k \in \mathbb{Z}$. Comme m et n sont premiers entre eux, on a $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Il existe donc des entiers p, $q \in \mathbb{Z}$ tels que $k = np + mq$. Mais on peut aussi écrire, pour tout $l \in \mathbb{Z}$:

$$k = n(p + ml) + m(q - nl)$$

Comme $m \neq 0$, on voit que l'on peut choisir l'entier l de sorte que $p + ml \in \mathbb{N}$, ce qui montre bien que $k \in n\mathbb{N} + m\mathbb{Z}$. On a donc $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} = \frac{2\pi}{m}\mathbb{Z}$ et par suite :

$$I = \Gamma(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}) = \Gamma\left(\frac{2\pi}{m}\mathbb{Z}\right) = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{m}}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

donc I est l'ensemble des racines m-èmes de l'unité et la trajectoire de la boule a l'apparence de celle représentée sur la figure 1.

$*$ À présent, étudions le cas où $\theta/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$. Si l'on a $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, alors il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $\theta = an$, $2\pi = am$ et donc $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, ce qui est exclu. La partie $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est donc bien dense dans $\mathbb{R}$ et il en résulte que $I = \Gamma(\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $\mathbb{U}$ en vertu de la surjectivité et de la continuité de Γ (voir figures 2 et 4). En effet, si $z \in \mathbb{U}$ est tel que $z = \Gamma(x)$ où $x \in \mathbb{R}$ et si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de $\theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ qui converge vers x, alors $(\Gamma(x_n))_{n\geqslant 0}$ est une suite de I qui converge vers z. La trajectoire de la boule a alors une apparence proche de celle représentée sur la figure 2.

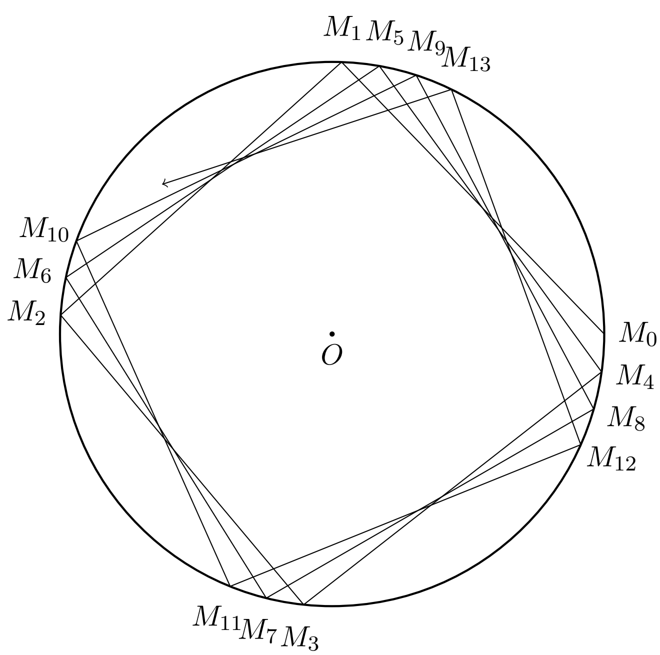

Figure 2 – Cas dense.

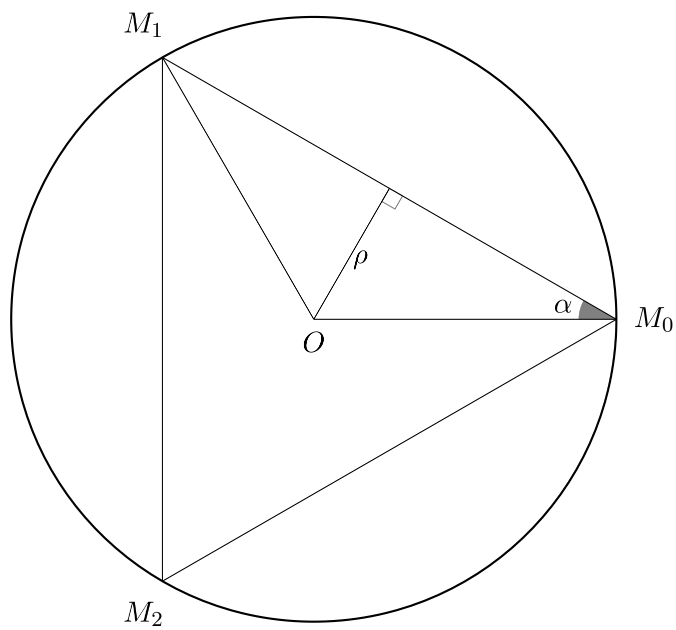

FIGURE 3 – Détermination du rayon du cercle caustique.

b) Supposons qu'il existe $\rho > 0$ tel que chaque corde $[M_k M_{k+1}]$ soit tangente au cercle de centre O et de rayon ρ. Alors ρ est la distance de O au segment $[M_k M_{k+1}]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Plaçons nous dans le triangle OM_0M_1. On voit que $\rho = |\sin(\alpha)|$, où l'angle α a été défini au début de la correction. Réciproquement, le fait que les triangles OM_kM_{k+1} soient obtenus les uns à partir des autres par une rotation de centre O permet de voir que tous les segments de la trajectoire sont tangents au cercle de centre O et de rayon $\rho = |\sin(\alpha)|$ dès lors que $[M_0M_1]$ l'est, ce qui est bien le cas par construction de ρ.

La figure 4 représente les cercles caustiques obtenus pour différentes valeurs de θ. ■

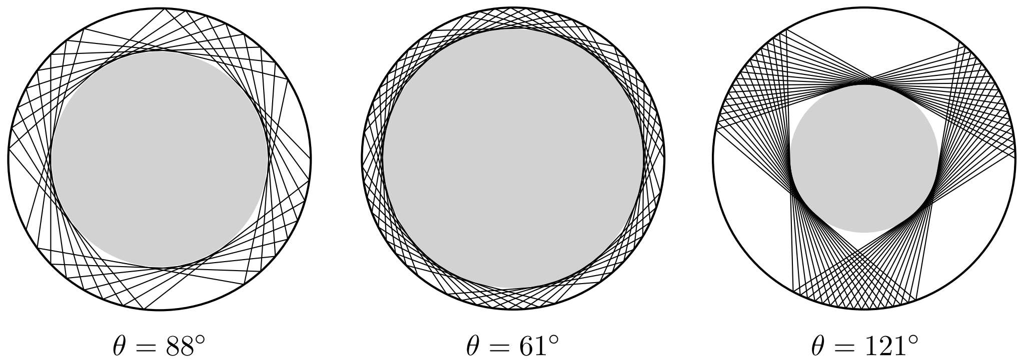

FIGURE 4 – Quelques exemples de cercles caustiques pour différentes valeurs de θ (on a représenté les disques ouverts correspondants pour une meilleure lisibilité).

Questions :

1) Décrire ce qui se passe lorsque $\alpha = 0$.

2) Détailler la preuve du fait que $\theta = \pi + 2\alpha$.

3) Quelle est la longueur du segment $[M_k M_{k+1}]$?

4) Justifier en détail que la surjectivité de Γ permet d'écrire $\Gamma(\Gamma^{-1}(I)) = I$.

5) A-t-on $I = \mathbb{U}$?

6) Tout point du cercle caustique est-il tangent à un segment de la trajectoire de la boule ?

7) Dans le cas où $\theta/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$, déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des points qui sont adhérents à la trajectoire de la boule.

Indication : on montrera qu'il s'agit de la couronne $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \rho \leqslant |z| \leqslant 1\}$. Il est clair que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Pour montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, on pourra prendre un point $z \in \mathcal{C}$, mener une tangente au cercle caustique passant par z, considérer un point d'intersection de la tangente avec $\mathbb{U}$ et utiliser la densité de I dans $\mathbb{U}$.
