Chapitre 1

METHODES SUR LES NOMBRES REELS

Les nombres réels c'est « tout le monde » puisqu'il contient :
- les nombres entiers positifs : 0, 1, 2, 3, ...,14587,...
- les nombres entiers strictement négatifs : ... -23567 , ..., -3 , -2 , -1.
- les nombres décimaux (qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule comme 16,75 par exemple).
- les nombres rationnels (c'est-à-dire toutes les fractions) à développement décimal (régulier) fini ou pas, comme $\frac{3}{4}=0,75$, $\frac{1}{3}=0,33333...$, $\frac{1}{7}=0,1428571428571...$
- et enfin tous les nombres « bizarres » (qu'on appelle irrationnels) comme $\pi = 3,141592653589...$, $\sqrt{2} = 1,41421356237...$ à développement décimal fanchement casse-c… euh… pardon casse-pieds car très irrégulier (en même temps c'est ça qui font leur beauté, tout leur mystère paraît-il…)

Bref dans cette gigantesque poubelle à nombres qu'on appelle nombres réels et qu'on note $\mathbb{R}$, comment s'y retrouver ?
C'est justement l'objet de ce chapitre qu'on va se charger de vous expliquer. Du coup n'oubliez pas de couper votre smartphone car il va falloir être un minimum attentif, c'est parti !

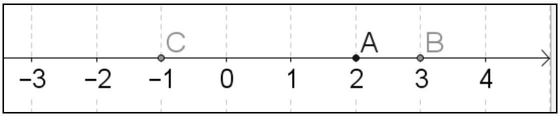
1. Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et droite numérique

Bonne nouvelle, on dispose d'une sympathique droite graduée (appelée droite numérique) sur laquelle on peut disposer les nombres réels (pas n'importe comment bien sûr, on n'est pas à la foire… mais en utilisant les graduations). Voyons tout ça !

METHODE 1 : Comment associer à chaque point de la droite numérique un unique nombre réel et réciproquement ?

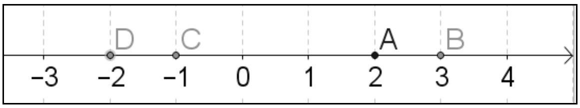
■ **Principe :**
Aucune difficulté, il suffit d'être attentif aux graduations.

■ **Exemple :** *On considère les points de la droite numérique ci-dessous :*



1) Déterminer les nombres réels associés aux points A, B et C.
2) Placer sur la droite numérique, le point D associé au nombre -2.

1) Rien de compliqué (c'est même curieux tellement c'est facile…) :
- le point A est associé au nombre réel 2 ;
- le point B est associé au nombre réel 3 ;
- le point C est associé au nombre réel -1.
2) On obtient :

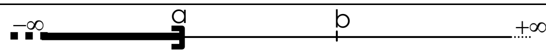
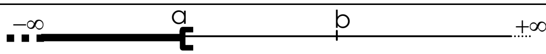
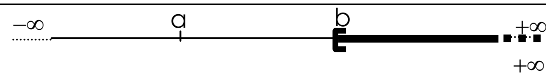
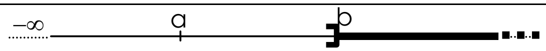


REMARQUE :
Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'il n'y a aucun piège : à chaque point de la droite numérique est associée une unique valeur réelle.

2. Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$

METHODE 2 : Comment utiliser les caractérisations d'appartenance à un intervalle ?

■ **Principe :**
a) Lorsque le crochet entoure le nombre, on dit qu'il est fermé, dans le cas contraire on dit qu'il est ouvert.
Par exemple, $[2;3[$ est fermé en 2 (mais ouvert en 3), cela veut dire qu'il contient 2 mais pas 3 !
$]2;3]$ est fermé en 3 (mais ouvert en 2), cela veut dire qu'il contient 3 mais pas 2, $[2;3]$ est fermé en 2 et en 3, cela veut dire qu'il contient 2 et 3, $]2;3[$ est ouvert en 2 et en 3, donc il ne contient ni 2 ni 3.
b) On ne ferme jamais l'infini (c'est presque philosophique, car on ne l'atteint jamais !), il ne faut jamais écrire $[-\infty;3]$ mais $]-\infty;3]$.

Inégalités	Intervalles	Droite graduée
$a \le x \le b$	$x \in [a;b]$	
$a < x \le b$	$x \in]a;b]$	
$a \le x < b$	$x \in [a;b[$	
$a < x < b$	$x \in]a;b[$	
$x \le a$	$x \in]-\infty;a]$	
$x < a$	$x \in]-\infty;a[$	
$x \ge b$	$x \in [b;+\infty[$	
$x > b$	$x \in]b;+\infty[$	

■ **Exemple :** *Traduire en termes d'intervalles les inégalités suivantes :*

a) $-2 \le x \le 3$ *b)* $0 < x \le \dfrac{5}{2}$ *c)* $-3 \le x < 0$ *d)* $-5 < x < 3$

e) $x \le -4$ *f)* $x < 0$ *g)* $x \ge 2{,}1$ *h)* $x > 5$

On a :

a) $x \in [-2;3]$ b) $x \in \left]0;\dfrac{5}{2}\right]$ c) $x \in [-3;0[$ d) $x \in]-5;3[$

e) $x \in]-\infty;-4]$ f) $x \in]-\infty;0[$ g) $x \in [2{,}1;+\infty[$ h) $x \in]5;+\infty[$

■ **Exemple :** *Traduire en termes d'inégalités l'appartenance aux intervalles suivants :*

a) $x \in [-5;2]$ *b)* $x \in \left]-1;\dfrac{3}{2}\right]$ *c)* $x \in [-5;1[$ *d)* $x \in]-1;4[$

e) $x \in]-\infty;5{,}1]$ *f)* $x \in]-\infty;-1[$ *g)* $x \in [0;+\infty[$ *h)* $x \in]-3;+\infty[$

On a :

a) $-5 \le x \le 2$ b) $-1 < x \le \dfrac{3}{2}$ c) $-5 \le x < 1$ d) $-1 < x < 4$

e) $x \le 5{,}1$ f) $x < -1$ g) $x \ge 0$ h) $x > -3$

■ **Exemple :** *Déterminer à quel(s) intervalle(s) appartiennent les nombres* 0 *et* 2

a) $I_1 =]-5;4[$ b) $I_2 =]0;4[$ c) $I_3 =]-5;-3[$ d) $I_4 = [0;5[$

e) $I_5 = [-1;+\infty[$ f) $I_6 =]-\infty;\infty[$ g) $I_7 =]-5;0[$ h) $I_8 =]-7;0]$

On obtient : $0 \in I_1$, $0 \in I_4$, $0 \in I_5$, $0 \in I_6$, $0 \in I_8$.
On obtient : $2 \in I_1$, $2 \in I_2$, $2 \in I_4$, $2 \in I_5$, $2 \in I_6$.

REMARQUE : Ces écritures sous forme d'intervalle seront extrêmement utiles dans le chapitre 5 (Inéquations), donc autant être fort sur ce chapitre !

■ **Exemple (géométrie) :** *Lors d'un DS, Brice à son exercice trouve une longueur égale à* -3. *Il remarque (par pur hasard, évidemment) que son camarade lui trouve une longueur égale à 4. Qui risque d'avoir raison ?*

Comme x est une longueur, on a forcément $x \in [0;+\infty[$ (et oui une longueur est forcément positive). Brice hésitant entre les deux valeurs -3 et 4, comme $-3 \notin [0;+\infty[$ il faut l'écarter et se concentrer sur la valeur restante, la valeur 4 !

3. Notation $|a|$, distance entre deux nombres réels

A- Notation $|a|$

« C'est quoi a avec des barres ? » est la question la plus entendue dans les cours de maths de France et de Navarre. Pour être clair, déjà on dit « valeur absolue de a » (ce qui est quand même plus classe que « a avec des barres », à moins que ça soit une barre de rire et encore…) et ce qu'il faut en retenir c'est que $|a|$ est toujours positif (quitte à rendre positif ce qui était négatif). Voyons plus précisément ce que c'est !

METHODE 3 : Comment simplifier une valeur absolue ?

■ **Principe :**

On applique la formule $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ \text{ou} \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$. (En gros, une valeur absolue change le négatif en positif).

■ **Exemple :** *Simplifier :*

a) $|4|$ *b)* $|-7|$ *c)* $|8-5|$ *d)* $|3-11|$ *e)* $|2-3|+|3-4|$ *f)* $|-1|+|1|$

a) $|4| = 4$ b) $|-7| = 7$ c) $|8-5| = |3| = 3$ (penser à simplifier d'abord $8-5$)

d) $|3-11| = |-8| = 8$ e) $|2-3|+|3-4| = |-1|+|-1| = 1+1 = 2$ f) $|-1|+|1| = 0+1+1 = 2$.

B- Distance entre deux nombres réels a et b

Comment calculer la distance entre deux réels ? Bon, entre 5 et 3 la distance vaut 2 $(5-3=2)$, tout comme à priori la distance entre 3 et 5 (et pourtant $3-5=-2$). Etrange paradoxe. Comment trouver une formule universelle qui marche tout le temps ? Eh bien on l'a trouvé, c'est justement la valeur absolue qu'on vient de voir (car $|5-3|=|2|=2$ et $|3-5|=|-2|=2$). C'est parti !

METHODE 4 : Utiliser la formule $|a-b|$

■ **Principe :**
$|a-b|$ désigne la distance entre les deux nombres réels a et b tout simplement.

■ **Exemple :** *Déterminer la distance entre les deux réels :*
a) 10 et 4. *b) 4 et 10.* *c) 5 et -2.*

a) La distance entre 10 et 4 vaut $|10-4|=|6|=6$.

b) La distance entre 4 et 10 vaut $|4-10|=|-6|=6$.

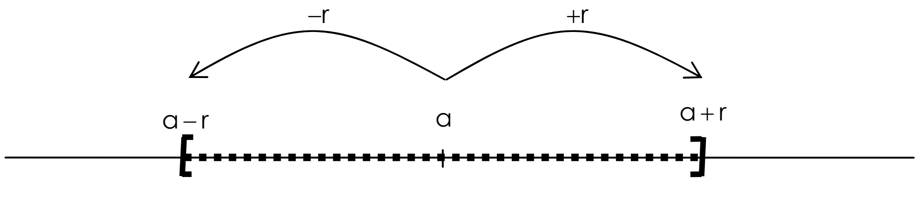
c) La distance entre 5 et -2 vaut $|5-(-2)|=|5+2|=|7|=7$. Trop easy, non ?

4. Représentation de l'intervalle $[a-r;a+r]$ puis caractérisation par la condition $|x-a|\le r$

Bon, passons aux intervalles graphiques, vous allez voir c'est super facile…

METHODE 5 : Comment représenter l'intervalle $[a-r;a+r]$ $(r\ge 0)$?

■ **Principe :**
C'est tout simplement un intervalle centré en a avec $a-r$ sur le bord gauche et $a+r$ sur le bord droit, comme ci-dessous :

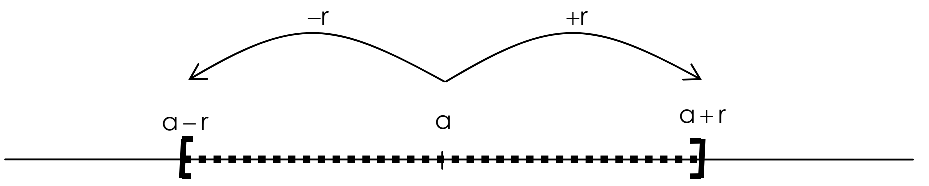


REMARQUE : Bon c'est pas dur, voyons maintenant le lien entre ces intervalles, les inéquations et les valeur absolues !

METHODE 6 : Comment utiliser la caractérisation $|x-a| \le r \Leftrightarrow x \in [a-r;a+r]$ $(r \ge 0)$?

■ **Principe :**

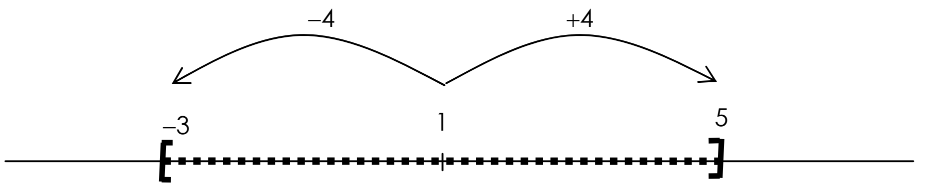
$|x-a|$ est graphiquement la distance de x à a. $|x-a| \le r$ signifie donc que la distance de x à a est inférieure ou égale à r.



Ainsi : $|x-a| \le r$ équivaut à : $a-r \le x \le a+r \Leftrightarrow x \in [a-r;a+r]$.

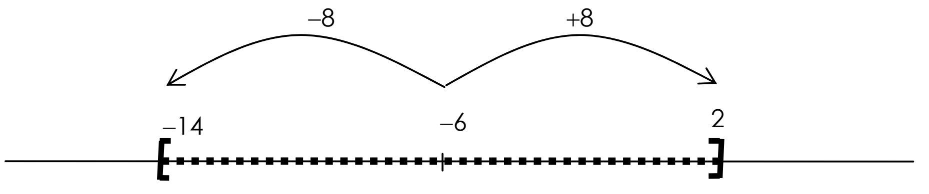
Cette caractérisation va maintenant nous permettre de résoudre graphiquement des inéquations !

■ **Exemple :** *Résoudre l'inéquation* $|x-1| \le 4$.



Ainsi $|x-1| \le 4$ équivaut à $-3 \le x \le 5$ c'est-à-dire $x \in [-3;5]$. Donc $S = [-3;5]$.

■ **Exemple :** *Résoudre l'inéquation* $|x+6| \le 8$.



Ainsi $|x+6| \le 8 \Leftrightarrow -14 \le x \le 2 \Leftrightarrow x \in [-14;2]$. Donc $S = [-14;2]$.

Et voilà, c'en est fini des valeurs absolues. Facile, n'est-ce pas ?

5. Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près

C'est quoi un décimal ? Eh bien c'est un nombre qui possède un nombre fini de chiffres après la virgule.

Par exemple : 23,567 ; $-12{,}1$; 53 mais pas $\frac{1}{3}=0{,}33333...$ (car le développement décimal ne s'arrête pas).
Concernant les nombres décimaux, il y a un certain nombre de choses à connaître. On vous montre lesquelles (Eh reposez votre portable ! C'est le moment de vous réveiller et de suivre un peu).

METHODE 7 : Comment écrire un nombre décimal positif en notation scientifique ?

C'est ce qu'utilisent les ingénieurs et les physiciens (c'est donc incontournable !). Nous on le fait, parce que la notation scientifique est très utilisée en chimie, mécanique… électricité. L'idée est la suivante : donner un ordre de grandeur aux nombres et aux choses. Par exemple l'atome est de l'ordre de l'infiniment petit, plus précisément de l'ordre du nanomètre soit 10^{-9} mètre. Les galaxies par contre sont de l'ordre de l'infiniment grand : la nôtre par exemple, c'est-à-dire la voie lactée a un diamètre de l'ordre de 10^{21} mètre ! Rien à voir, donc. Voyons maintenant en détail comment faire.
Tout nombre décimal positif peut s'écrire sous la forme $a\cdot 10^n$ avec : $1\le a<10$ et n entier. Cette écriture s'appelle notation scientifique (ou ingénieure) et dans l'écriture $a\cdot 10^n$, n s'appelle l'ordre de grandeur.
Tout d'abord il faut bien connaître vos puissances de 10, car on va les utiliser tout le temps !

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000	1.000.000.000
10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^9

1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,000000001
10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}

Voici un moyen tout simple de s'en souvenir : on compte le nombre de zéros !
Par exemple : 100.000.000.000 comporte 11 zéros après le 1, c'est donc 10^{11}.
Par exemple : 0,000001 comporte 6 zéros en tout (attention à bien compter le zéro avant la virgule), c'est donc 10^{-6} (Attention, la puissance est négative car le nombre est entre 0 et 1). Bien, et ensuite, que faire ?

■ Principe

a) Repérer entre quelles puissances de 10 consécutives se trouve le nombre.
b) En déduire une factorisation par la première puissance de 10, pour trouver le nombre a.
c) En déduire n.

■ **Exemple :** *Ecrire* $12{,}758$ *en notation scientifique.*
$12{,}758$ est entre 10 et 100, donc on va factoriser par 10 ce qui donne :
$12{,}758=1{,}2758\times 10$ et donc : $12{,}758=1{,}2758\times 10^1$. Facile, non ?

■ **Exemple :** *Ecrire les nombres suivants en notation scientifique.*
a) 123,45 *b)* 1024 *c)* 999999 *d)* 0,9998 *e)* 0,000001001 *f)* 0,034

a) 123,45 est entre 100 et 1000, donc : $123,45 = 1,2345 \cdot 100$ et donc :
$123,45 = 1,2345 \cdot 10^2$. Terminé !
b) 1024 est entre 1000 et 10000 d'où : $1024 = 1,024 \cdot 1000$ soit : $1024 = 1,024 \cdot 10^3$.
c) 999999 est entre 100000 et 1000000 d'où :
$999999 = 9,99999 \cdot 100000$ puis : $999999 = 9,99999 \cdot 10^5$.
d) 0,9998 est entre 0,1 et 1, d'où : $0,9998 = 9,998 \cdot 0,1$ d'où : $0,998 = 9,998 \cdot 10^{-1}$.
e) 0,000001001 est entre 0,000001 et 0,00001 d'où :
$0,000001001 = 1,001 \cdot 0,000001$ soit : $0,000001001 = 1,001 \cdot 10^{-6}$.
f) 0,034 est entre 0,01 et 0,1 d'où : $0,034 = 3,4 \cdot 0,01$ soit : $0,034 = 3,4 \cdot 10^{-2}$.

REMARQUE : Avec un peu d'habitude, vous n'aurez même plus besoin d'écrire toutes ces étapes pour trouver le résultat. Evidemment, il faut s'entraîner !

METHODE 8 : Comment donner une valeur approchée d'un nombre à 10^{-n} près ?

Pour commencer, une valeur approchée c'est une valeur tronquée.
Il n'y a d'ailleurs pas qu'un seul type de valeur approchée : il y a les valeurs approchées par défaut (légèrement en dessous), par excès (légèrement au-dessus) et arrondie (la plus proche de la valeur). Voyons cela !

■ Principe

Le plus simple est d'étudier un exemple : $\pi = 3,14159...$ (à la calculatrice)
Si on demande une valeur approchée à 10^{-3} près , on garde les deux premiers chiffres après la virgule (c'est-à-dire 1 et 4), et pour le troisième :
a) On prend 1 pour une valeur approchée par défaut, ce qui donne : 3,**14**1.
b) On prend 2 pour une valeur approchée par excès, ce qui donne : 3,**14**2.
c) On prend 2 pour une valeur arrondie car 159 est plus proche de 200 que de 100, ce qui donne 3,**14**2.
Quoi qu'il en soit, un réel a dont on donne une valeur approchée b à 10^{-n} près vérifie l'inégalité $|a-b| \leq 10^{-n}$.

■ **Exemple :** *Donner les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.*
a) par défaut b) par excès c) arrondie.

A la calculatrice, $\sqrt{2}$ = 1,**4142**13562...
a) La valeur approchée à 10^{-5} près par défaut de $\sqrt{2}$ est : 1,**4142**1.
b) La valeur approchée à 10^{-5} près par excès de $\sqrt{2}$ est : 1,**4142**2.
c) La valeur arrondie à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$ est : 1,**4142**1 car 13562 est plus proche de 10000 que de 20000.