

# Chapitre 1

## Indices

### Ce que dit le Programme Pédagogique National

Indices : pourcentages, taux de variation, taux moyen.

### 1.1 Taux de variation

#### Définitions 1

La **variation absolue** est une valeur permettant de mesurer l'écart d'une grandeur entre deux périodes. Elle est donnée par la relation :  $V = \text{valeur finale} - \text{valeur initiale}$ .

Le **taux de variation** est une valeur permettant de mesurer l'évolution d'une grandeur entre deux périodes. Il est donné par la relation :  $\tau = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} - 1$ .

Le **coefficient multiplicateur** est le rapport d'une grandeur entre deux périodes. Il est donné par la relation :  $CM = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$ .

L'**indice simple** évalue le rapport d'une grandeur à une valeur de référence (appelée base), correspondant généralement à l'indice 100. Dans ce cas, il est donné par la relation :  $I = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$ .

**Remarques 2 :**

- un taux de variation n'a pas d'unité (il est par exemple le même pour une masse passant de 5 kg à 10 kg et pour un prix passant de 5€ à 10€).
- pour exprimer le taux de variation sous la forme d'un pourcentage, il suffit de multiplier le résultat obtenu par 100.

**Exemple 3 :** le prix d'un article est passé de 120€ à 180€ :

- la variation absolue est de  $180 - 120 = 60$ € ;
- le taux de variation est de  $\frac{180}{120} - 1 = 0,5$  soit une hausse de 50% ;
- le coefficient multiplicateur est  $\frac{180}{120} = 1,5$  ;
- l'indice du nouveau prix, base 100, est  $\frac{180}{120} \times 100 = 150$ .

Ainsi, une hausse de 50% correspond à un coefficient multiplicateur de 1,5 et à un indice de 150.

**Propriétés 4**

On déduit des définitions les relations suivantes :

- $\tau = CM - 1$  ou encore  $CM = \tau + 1$ ,
- $I = CM \times 100$  ou encore  $CM = \frac{I}{100}$ .

**Remarques 5 :**

- si un taux de variation est exprimé sous la forme d'un pourcentage, il faudra bien veiller à revenir à sa forme décimale (c'est-à-dire à le diviser par 100) avant d'utiliser la relation  $CM = \tau + 1$  ;
- si l'évolution d'une grandeur est à la hausse, alors  $\tau > 0$ ,  $CM > 1$  et  $I > 100$  (indice base 100) ;
- si l'évolution d'une grandeur est à la baisse, alors  $\tau < 0$ ,  $CM < 1$  et  $I < 100$  (indice base 100).

**Propriété 6***Évolutions successives*

Soient  $v_1, v_2, v_3$  les valeurs d'une grandeur sur trois périodes. Notons  $CM_{1,2}$  le coefficient multiplicateur de  $v_1$  à  $v_2$  (on a donc  $CM_{1,2} = \frac{v_2}{v_1}$ ) et  $CM_{2,3}$  le coefficient multiplicateur de  $v_2$  à  $v_3$  (on a donc  $CM_{2,3} = \frac{v_3}{v_2}$ ). Alors, le coefficient multiplicateur de  $v_1$  à  $v_3$  est  $CM_{1,2} \times CM_{2,3}$ .

**Exemple 7** : un prix a baissé de 25%, puis augmenté de 25%. Alors, le coefficient multiplicateur global est :  $(1 - 0,25) \times (1 + 0,25) = 0,75 \times 0,25 = 0,9375$  ce qui correspond à un  $\searrow_{25\%} \nearrow_{25\%}$  taux de variation global de  $0,9375 - 1 = -0,0625$  soit à une baisse de 6,25% du prix. Contrairement aux idées reçues, une hausse de 25% « n'annule pas » une précédente baisse de 25% !

**Propriété 8***Évolution réciproque*

Soient  $v_1$  et  $v_2$  les valeurs d'une grandeur sur deux périodes. Notons  $CM_{1,2}$  le coefficient multiplicateur de  $v_1$  à  $v_2$  (on a donc  $CM_{1,2} = \frac{v_2}{v_1}$ ). Alors, le coefficient multiplicateur de  $v_2$  à  $v_1$  est  $\frac{1}{CM_{1,2}}$ .

**Exemple 9** : un ticket de caisse ne contenant que des produits alimentaires affiche un total de 89,03€ TTC. On cherche à retrouver le prix HT et le montant de TVA de ce ticket (sachant que la TVA sur l'essentiel des produits alimentaires est de 5,5%).

Le taux de TVA étant de 5,5%, le coefficient multiplicateur du prix HT au prix TTC est 1,055. On en déduit que le coefficient multiplicateur du prix TTC au prix HT est  $\frac{1}{1,055}$ .

Ainsi, le prix HT est :  $89,03 \times \frac{1}{1,055} \approx 84,39\text{€}$  soit un montant de TVA sur ce ticket de  $89,03 - 84,39 = 4,64\text{€}$ .

## 1.2 Taux moyen

### Définition 10

Le taux de croissance moyen (TCM) permet de calculer un taux d'évolution moyen sur  $n$  périodes.

Si  $v_1$  est la valeur d'une grandeur et  $v_n$  la valeur de cette même grandeur  $n$  périodes plus tard, alors le taux de croissance moyen sur une période (pendant ces  $n$  périodes) est donné par la relation :

$$TCM = \sqrt[n]{\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}} - 1 = \left(\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

**Exemple 11 :** la population de la ville de Paris est passée de 2 125 246 habitants en 1999 à 2 206 488 en 2015 (c'est-à-dire en 16 ans).

Le taux d'évolution annuel moyen de la population de la ville de Paris entre 1999 et 2015 est donc :  $\sqrt[16]{\frac{2\,206\,488}{2\,125\,246}} - 1 \approx 0,0023$  soit 0,23%.

En moyenne, la population de la ville de Paris a donc augmenté de 0,23% par an de 1999 à 2015.

### Propriété 12

Soit  $C$  le coefficient multiplicateur global d'une grandeur sur  $n$  périodes.

Le coefficient multiplicateur moyen (CMM) sur une période (pendant ces  $n$  périodes) est alors :  $CMM = \sqrt[n]{C} = C^{\frac{1}{n}}$ .

**Exemples 13 :** au 1<sup>er</sup> mars 2008, l'Euro s'échangeait contre 1,51890 Dollar et au 1<sup>er</sup> mars 2015, il s'échangeait contre 1,11819 Dollar (c'est-à-dire en 7 ans).

Le coefficient multiplicateur global de la valeur du Dollar en 2008 à la valeur du Dollar en 2015 est égal à  $\frac{1,11819}{1,51890} \approx 0,74$  et le coefficient multiplicateur moyen est alors égal à  $\sqrt[7]{0,74} \approx 0,96$ .

En moyenne, la valeur d'échange Euro/Dollar a donc été multipliée par 0,96 par an du 1<sup>er</sup> mars 2008 au 1<sup>er</sup> mars 2015.

**Remarque 14 :** on déduit de tout cela que  $TCM = CMM - 1$  ou encore  $CMM = TCM + 1$ .

## Ce qu'il faut retenir

- **Variation absolue** :  $V = \text{valeur finale} - \text{valeur initiale}$
- **Taux de variation** :  $\tau = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} - 1$
- **Coefficient multiplicateur** :  $CM = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$
- **Indice (base 100)** :  $I = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$
- **Relations entre ces grandeurs** :
  - $\tau = CM - 1$  ou  $CM = \tau + 1$
  - $I = CM \times 100$  ou  $CM = \frac{I}{100}$
- **Évolutions successives** :  $CM_{1,3} = CM_{1,2} \times CM_{2,3}$
- **Évolution réciproque** :  $CM_{2,1} = \frac{1}{CM_{1,2}}$
- **Taux de croissance moyen** :
 
$$TCM = \sqrt[n]{\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}} - 1 = \left(\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$
- **Coefficient multiplicateur moyen** :  $CMM = \sqrt[n]{C} = C^{\frac{1}{n}}$
- **Relations entre ces grandeurs** :  $TCM = CMM - 1$  ou  $CMM = TCM + 1$

## 1.3 Exercices

## Exercice 1

« *Lien entre taux de variation, coefficients multiplicateurs et indices* »

Compléter les phrases suivantes :

1. Une hausse de 5% correspond à un coefficient multiplicateur de ... et à un indice base 100 de ... .
2. Une baisse de 75% correspond à un coefficient multiplicateur de ... et à un indice base 100 de ... .
3. Une hausse de 300% correspond à un coefficient multiplicateur de ... et à un indice base 100 de ... .

4. Un coefficient multiplicateur de 0,955 correspond à un taux de variation de ... et à un indice base 100 de ... .
5. Un coefficient multiplicateur de 1,3 correspond à un taux de variation de ... et à un indice base 100 de ... .
6. Un coefficient multiplicateur de 2 correspond à un taux de variation de ... et à un indice base 100 de ... .
7. Un indice base 100 de 250 correspond à un taux de variation de ... et à un coefficient multiplicateur de ... .
8. Un indice base 100 de 120 correspond à un taux de variation de ... et à un coefficient multiplicateur de ... .
9. Un indice base 100 de 95 correspond à un taux de variation de ... et à un coefficient multiplicateur de ... .

**Exercice 2***« Le prix du pain »*

Le prix du pain est passé de 0,56€ en 1993 à 0,87€ (en moyenne) en 2016.

1. Calculer la variation absolue, le taux de variation et le coefficient multiplicateur du prix du pain de 1993 à 2016.  
Interpréter ces grandeurs.
2. Calculer l'indice base 100 l'année 1993 du prix du pain en 2016.
3. Calculer le taux de croissance moyen et le coefficient multiplicateur moyen du prix du pain de 1993 à 2016.  
Interpréter ces résultats.

**Exercice 3***« Le prix du carnet de tickets de métro »*

Le prix du carnet de 10 tickets de métro à Paris était de 14,90€ au 1<sup>er</sup> août 2017 et l'indice de ce prix base 100 au 1<sup>er</sup> juillet 2001 est 160,2.  
Déterminer le prix du carnet de 10 tickets de métro au 1<sup>er</sup> juillet 2001.

**Exercice 4***« Offres spéciales »*

*Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Pendant les soldes, le prix d'un pantalon passe de 85€ à 65€. Quel est le pourcentage de réduction ?
2. Une enseigne affiche la promotion suivante : « Trois paquets de café pour le prix de deux ! ». Quel est le pourcentage de réduction ?
3. Une enseigne affiche la promotion suivante : « Pour 50€ d'achats, bénéficiez de 50% de remise sur votre prochain achat d'une valeur de 50€ ! ».  
Lorraine a effectué un premier achat de 50€. Quel est le pourcentage de réduction minimale à l'issue de ces deux achats ?
4. Un site de vente en ligne propose des frais de livraison à 3,90€ et il offre ces frais pour un achat d'une valeur minimale de 25€. Quel est le pourcentage de remise maximale ?
5. Pendant une campagne promotionnelle, un commerçant souhaite faire des « prix ronds » et vendre tous les articles d'un rayon à 10€. Dans ce rayon, il y a des articles à 12,99€, à 14,99€ et à 17,99€.
  - (a) Quel est le pourcentage de remise sur chacun des articles ?
  - (b) S'il ne veut pas vendre à perte, il ne peut pas faire plus de 35% de remise. Le commerçant peut-il réaliser cette offre ?  
Sinon, quel « prix rond » le plus bas pourrait-il appliquer ?
6. Suite à une offre exceptionnelle de lancement, un appareil, qui était vendu 450€, subit une hausse de 7,5%. Quel est son nouveau prix ?
7. Après remise de 15%, une voiture est vendue 11990€. Quel était son prix initial ?
8. Le litre d'essence a subi une baisse de 10%, puis une hausse de 15%. Quel est le pourcentage global de variation ?
9. Un commerçant, voyant qu'il vend très bien un article, décide d'en augmenter le prix de 30%.  
Finalement, cette hausse trop importante a considérablement freiné les ventes.

Il décide donc de revenir au prix initial en précisant à ses clients le pourcentage de baisse subi par l'article.  
Déterminer ce pourcentage.

### Exercice 5

#### « *Facturations* »

*Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Une facture de fournitures s'élève à 247,40€ TTC. Le taux de TVA appliqué est de 20%.  
Déterminer le montant HT de cette facture et en déduire le montant de TVA.
2. Sur une facture d'électricité, deux taux de TVA sont appliqués : 5,5% pour l'abonnement et 20% pour les consommations. Le prix de l'abonnement HT est de 7,16€ par mois.
  - (a) Isabelle a une consommation HT de 32,43€. Quel est le montant TTC de sa facture ?
  - (b) Isabelle a une facture TTC de 39,59€. Quel a été le montant HT de sa consommation ?
3. Monsieur Losange achète une voiture en Belgique au prix de 14900€ TTC, avec une TVA de 21% dans ce pays. Le concessionnaire lui dit qu'il doit payer la voiture HT en Belgique et la TVA sur le véhicule en France au taux de 20%.  
Combien Monsieur Losange aura-t-il payé sa voiture au final ?
4. Au 1<sup>er</sup> janvier 2011, la TVA sur les « abonnements composites » comprenant de la télévision (qu'ils s'agissent d'un accès à internet fixe ou d'un forfait mobile) est passée de 5,5% à 19,6%.  
Le 1<sup>er</sup> janvier 2014, cette même TVA est passée de 19,6% à 20%.  
Alex a un abonnement chez un opérateur depuis 2008 qu'il payait alors 29,90€ par mois.
  - (a) Quel a été le prix de son abonnement entre le 1<sup>er</sup> janvier 2011 et le 31 décembre 2013 ?
  - (b) Quel est le prix de son abonnement depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2014 ?