Déterminer le champ de pression dans un fluide incompressible

Quand on ne sait pas !

- Un champ de pression $p(M,t)$ se calcule à partir de l'équation de Navier-Stokes sur la conservation de la quantité de mouvement :

$$\mu\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \mu\,\vec{f} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) + \eta\vec{\Delta}\vec{v}$$

avec μ la masse volumique du fluide et η sa viscosité. Cette équation nécessite déjà 3 hypothèses sur le domaine de fluide $\mathcal{D}$:

  - $\mathcal{D}$ est un **milieu non raréfié** en fluide.
  - $\mathcal{D}$ est **dénué de discontinuités** (ondes de chocs).
  - L'écoulement est **incompressible**. Ceci permet de simplifier l'écriture de la force volumique d'efforts visqueux : $\vec{f_v} = \eta\vec{\Delta}\vec{v}$, et d'introduire la relation $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$.

- Le calcul du champ de pression $p(M,t)$ doit s'appuyer sur d'autres hypothèses si l'on veut simplifier son expression de façon simple :

  - L'écoulement est **permanent**, ou le **fluide au repos** : $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \vec{0}$.
  - Les forces volumiques agissant sur le fluide se résument à la gravité terrestre : $\vec{f} = \vec{g}$.
  - Le fluide est **parfait** $\eta\vec{\Delta}\vec{v} = \vec{0}$. Cette hypothèse permet de retirer l'hypothèse de fluide incompressible puisque les efforts visqueux n'apparaissent plus dans l'équation. C'est l'objet de la fiche suivante.

- Le calcul du champ de pression $p(M,t)$ peut donc se simplifier en jonglant avec les hypothèses précédentes assez classiques.

Que faire !

- Pour déterminer un champ de pression $p(M,t)$ dans un écoulement :
  - lister toutes les hypothèses permettant de simplifier les équations de Navier-Stokes
  - résoudre l'équation obtenue sur $p(M,t)$ dans le domaine de fluide $\mathcal{D}$

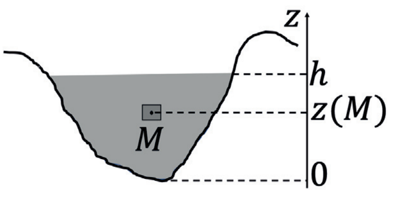
- vérifier la cohérence physique du champ de pression obtenu (gradient de pression généralement vers le bas)

Conseils

- Un raisonnement "mécanique" permet en général de retrouver l'équation du champ de pression dans un fluide incompressible :
  - isoler un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ autour du point M
  - établir une liste des efforts volumiques et surfaciques qui agissent sur l'élément de fluide
  - résoudre la 2^e loi de Newton sur l'élément de fluide de masse $\mu\ \mathrm{d}\tau$
  - remonter au champ de pression à l'aide d'hypothèses simplificatrices
- Cette méthode revient à redémontrer l'équation de conservation de la quantité de mouvement mais dans des cas bien définis et simples.

Exemple traité

On cherche à établir un champ de pression hydrostatique pour de l'eau au repos dans un lac. On note $z(M)$ l'altitude d'un élément de fluide au point M et h la profondeur maximale du lac. La masse volumique de l'eau est notée μ et la pression atmosphérique est notée p_{atm}.



1 En partant de l'équation de Navier-Stokes sur la conservation de la quantité de mouvement, lister les hypothèses qui permettent de simplifier l'équation.

2 Remonter au champ de pression hydrostatique.

3 Vérifier la cohérence du résultat. Est-ce conforme à l'intuition physique que l'on peut avoir.

4 Retrouver ce résultat en écrivant la deuxième loi de Newton sur un élément de fluide autour du point M.

SOLUTION

1 L'équation de Navier-Stokes sur la conservation de la quantité de mouvement est :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}(M,t) = \underbrace{-g\ \vec{e}_z}_{\vec{g}} - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)(M,t) + \frac{\eta}{\mu}\vec{\Delta}\vec{v}(M,t)$$

On peut donc lister les hypothèses suivantes :

• Le fluide est au repos : $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}(M,t) = \vec{0}$ et $\vec{\Delta}\vec{v}(M,t) = \vec{0}$ puisque $\vec{v}(M,t) = \vec{0}$

• Le fluide est incompressible $\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\text{grad}}(p)(M,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{p}{\mu}\right)(M,t)$

On peut donc réécrire l'équation obtenue en transformant : $-g\,\vec{e}_z = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(gz)$, on a donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{p(M,t)}{\mu} + gz(M,t)\right) = \vec{0}$$

2 L'intégration de l'expression obtenue s'écrit : $\frac{p(M,t)}{\mu} + gz(M,t) = constante$
On peut donc écrire : $\frac{p(M,t)}{\mu} + gz(M,t) = \frac{p(A,t)}{\mu} + gz(A,t)$
Soit :

$$p(M,t) = p_{atm} + \mu g(h - z(M,t))$$

3 On retrouve bien une pression p_{atm} en surface du lac $(z(M,t) = h)$ et une pression qui croît en profondeur.

4 On peut retrouver ce résultat en faisant un bilan des forces auxquelles est soumise la particule de fluide :
• Un effort volumique lié à l'accélération de la pesanteur : $\vec{f}_{pes} = -\mu g\,\vec{e}_z$.
• 6 efforts surfaciques sur chacune des faces du cube entourant le point M. Leur équivalent volumique est détaillé dans le chapitre sur les actions volumiques et de surface : $\vec{f}_\pi = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)(M,t)$.

La 2^e loi de Newton donne donc au repos :

$$\vec{0} = \vec{f}_{pes} + \vec{f}_\pi$$

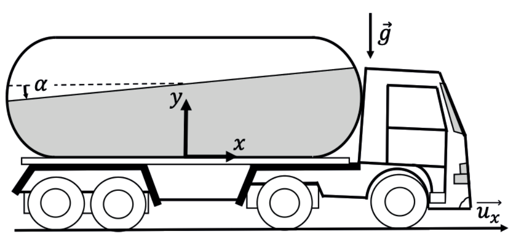
Soit :

$$-\mu g\,\vec{e}_z - \overrightarrow{\text{grad}}(p)(M,t) = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,(p(M,t) + \mu g z(M,t)) = \vec{0}$$

Exercices

EXERCICE 1.1 Hydrostatique des fluides

On considère un camion transportant des hydrocarbures de masse volumique μ. On note h la hauteur de fluide transporté au repos.



On étudie, dans un premier temps, le camion citerne qui avance à vitesse constante selon la direction $\vec{e}_x$.

1 Rappeler la loi de l'hydrostatique d'un fluide à l'équilibre soumis au champ de pesanteur terrestre $-\vec{g}$.

2 Exprimer la pression $p(x, y)$ du liquide dans la citerne.

3 Déterminer la forme de la surface libre du liquide dans la citerne ainsi que la forme des isobares (surfaces ayant la même pression).

On considère, cette fois, que le camion est en mouvement uniformément accéléré par rapport au référentiel terrestre, $\vec{a}_c = a\ \vec{e}_x$ ($a > 0$ lorsque le camion accélère et $a < 0$ lorsqu'il décélère).

4 Écrire la loi de l'hydrostatique s'appliquant au volume de liquide dans la citerne.

5 Déterminer le champ de pression $p(x, y)$ à une constante d'intégration près, notée β.

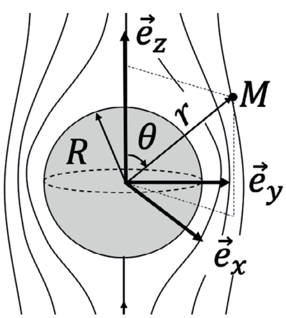
6 Établir l'expression de l'altitude $y_L(x)$ de la surface libre du liquide en fonction de p_{atm}, μ, g, a, β et x.

7 Déterminer la constante β par conservation du volume d'hydrocarbures dans la citerne.

8 En déduire le champ de pression $p(x, y)$. À quoi correspond l'angle α de la surface libre ?

EXERCICE 1.2 Écoulement de Stokes

On considère une sphère de rayon R contournée par un fluide de masse volumique μ en écoulement laminaire incompressible dont la vitesse d'écoulement loin de l'obstacle est notée $\vec{v} = +v\ \vec{e}_z$. Pour un champ de vecteurs $\vec{A}$ quelconque, on donne :



$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{cases} \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\left(\dfrac{\partial(\sin(\theta)A_\varphi)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r \\ \left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

1 Quelle équation sur la vitesse peut-on établir du fait de l'incompressibilité de l'écoulement ?

2 Compte tenu du problème, on admet donc que le champ de vitesses s'écrit sous la forme $\vec{v}(M) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\psi}(M))$ avec $\vec{\psi}(M) = \psi\ \vec{e}_\varphi$ un champ de vecteurs. Établir trois équations différentielles qui relient les coordonnées de $\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi)$ au vecteur $\vec{\psi}$.

3 En négligeant les effets de la pesanteur, écrire et simplifier l'expression de l'équation de Navier-Stokes. Quelle relation le champ de pression $p(r, \theta, \varphi)$ doit-il vérifier ?

4 Quelles sont les conditions aux limites du champ de vecteurs vitesses $\vec{v}$?

On admet que ψ s'écrit de la forme :

$$\psi = \frac{vr\ \sin(\theta)}{2}\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2\left(\frac{R}{2r} + 1\right)$$

5 En déduire l'allure du champ des vecteurs vitesses, en se souvenant que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(\psi\, \vec{e}_\varphi)$.

6 Une fois l'allure du champ des vecteurs vitesses défini, en déduire l'expression du champ de pression grâce à l'équation de Navier-Stokes. On se souviendra notamment que $\vec{\Delta}\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}))$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1 Appliquer le principe fondamental de la statique à une particule de fluide à l'équilibre.

EXERCICE 1.2

- Une des rares formules d'analyse vectorielle à retenir en cours de deuxième année est $\vec{\Delta}\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})\right)$. Avec l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement, on a :

$$\vec{\Delta}\vec{v} = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})\right)$$

- On pourra remarquer que : $\text{div}\left(\vec{\Delta}\vec{v}\right) = \Delta\,(\text{div}(\vec{v}))$.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1

1 La loi de l'hydrostatique permet d'établir :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\mu g \Rightarrow p(y) = p_{atm} + \mu g(h-y)$$

avec h la hauteur totale de fluide et p_{atm} la pression atmosphérique environnante.

2 Lorsque le camion roule à une vitesse constante, et en ligne droite, le fluide qu'il transporte ne subit pas d'accélération. On peut donc considérer qu'il suit une loi identique à la relation de l'hydrostatique établie dans la question précédente. On a donc :

$$p(x, y) = p_{atm} + \mu g(h-y)$$

Solutions

3 En l'absence d'accélération, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \mu g = constante$ donc les surfaces isobares sont horizontales et la surface libre est la surface isobare telle que $p(y) = p_{atm}$, soit $y = h$.

4 Le liquide subit maintenant une force apparente $\mu\vec{g} - \mu a\ \vec{e}_x$, le champ de pression vérifie donc la loi de l'hydrostatique qui prend en compte cette modification, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial p}{\partial x} & = & -\mu a \\ \frac{\partial p}{\partial y} & = & -\mu g \end{array}\right.$$

5 En intégrant la première équation, on a : $p(x,y) = -\mu a x + \alpha(y) + \beta$ avec $\alpha(y)$ une fonction dépendant uniquement de y et α une constante (indépendante de x et y).
En re-dérivant cette équation par rapport à y, on a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial p}{\partial y} & = & 0 + \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}y} + 0 \\ & = & -\mu g \end{array}$$

On a donc par identification $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}y} = -\mu g \Rightarrow \alpha(y) = -\mu g y$, ce qui donne :

$$p(x,y) = -\mu(ax + gy) + \beta$$

6 La surface libre vérifie $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}(ax+gy)} = cte$ (condition pour que ce soit une isobare) avec le paramètre $ax + gy$ maximal. Ce paramètre est maximal quand $p(x, y_m) = p_{atm}$ soit $ax + gy_m = \frac{\beta - p_{atm}}{\mu} \Rightarrow \beta = p_{atm} + \mu(ax + gy_m)$ ou $y_m = \frac{\beta - p_{atm}}{\mu g} - \frac{a}{g}x$.
On peut donc réécrire l'expression de la pression :

$$p(x,y) = \mu g(y_m(x) - y) + p_{atm}$$

7 La conservation du volume V d'hydrocarbures entraine la continuité du champ de pression au fur et à mesure que a tend vers 0. Nous avons établi que :

$$y_m = \frac{\beta - p_{atm}}{\mu g} - \frac{a}{g}x$$

Quand a tend vers 0 de façon très lente,

$$y_m \to \frac{\beta - p_{atm}}{\mu g}$$

Or, par identification avec le résultat de la première partie, on doit avoir une égalité entre h et y_m, on en déduit que :

$$\beta = \mu g h + p_{atm}$$

8 On peut donc réécrire le champ de pression :

$$p(x,y) = -\mu(ax+gy) + \mu gh + p_{atm}$$

De façon géométrique, on peut écrire que : $\tan(\alpha) = \frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{g}$. Le résultat négatif est cohérent puisque l'angle α est positif (comme sur le schéma) lorsque le camion freine, donc lorsque $a < 0$.

EXERCICE 1.2

1 L'incompressibilité de l'écoulement permet d'écrire que $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$.

2 Grâce à l'expression du vecteur rotationnel, on peut établir que :

$$\begin{cases} v_r &= \frac{1}{r\sin(\theta)} \times \frac{\partial(\sin(\theta)\psi)}{\partial\theta} \\ v_\theta &= -\frac{1}{r} \times \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \\ v_\varphi &= 0 \end{cases}$$

3 L'équation de Navier Stokes est :

$$\mu\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \mu\,\vec{f} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) + \eta\vec{\Delta}\vec{v}$$

Avec l'hypothèse de régime permanent et en négligeant les efforts de pesanteur, il reste :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) + \eta\vec{\Delta}\vec{v} = \vec{0}$$

On peut donc écrire que :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)\right) + \mathrm{div}\left(\eta\vec{\Delta}\vec{v}\right) = \vec{0}$$

Or $\mathrm{div}\left(\vec{\Delta}\vec{v}\right) = \vec{\Delta}\left(\mathrm{div}(\vec{v})\right) = 0$. Il reste donc :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)\right) = 0 \rightarrow \Delta p = 0$$

La pression p est une fonction dite "harmonique".

4 Les conditions aux limites de $\vec{v}$ sont :

- À l'infini : $\begin{cases} v_r &= v\cos(\theta) \\ v_\theta &= -v\sin(\theta) \\ v_\varphi &= 0 \end{cases}$
- À la paroi de la sphère : $v_r(R) = v_\theta(R) = v_\varphi(R) = 0$.

Solutions

5 Grâce à l'équation $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(\psi\, \vec{e}_\varphi)$, pour la coordonnée selon $\vec{e}_r$, on a :

$$v_r = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{vr\sin^2(\theta)}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right)^2\left(\frac{R}{2r}+1\right)\right) = v\cos(\theta)\left(\frac{R^3}{2r^3}-\frac{3R}{2r}+1\right)$$

Et pour la coordonnée en $\vec{e}_\theta$:

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{2}\sin(\theta)\left(\frac{R}{r}-1\right)^2\left(\frac{Rr}{2}+r^2\right)\right) = v\sin(\theta)\left(\frac{R^3}{4r^3}+\frac{3R}{4r}-1\right)$$

6 On a $\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \eta\vec{\Delta}\vec{v} = \vec{0}$, avec :
$\vec{\Delta}\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}))$

On peut réécrire $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) &= \left(v\sin(\theta)\left(-\tfrac{R^3}{2r^4}-\tfrac{1}{r}\right)+v\sin(\theta)\left(\tfrac{R^3}{2r^4}+\tfrac{3R}{2r^2}+\tfrac{1}{r}\right)\right)\vec{e}_\varphi\\ &= -\tfrac{3R}{2r^2}v\sin(\theta)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Soit, on notant $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})\right) &= \tfrac{1}{r\sin(\theta)}\tfrac{\partial(\sin(\theta)\omega)}{\partial\theta}\vec{e}_r - \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial(r\omega)}{\partial r}\vec{e}_\varphi\\ &= -\tfrac{3Rv}{r^3}\left(\cos(\theta)\,\vec{e}_r+\tfrac{1}{2}\sin(\theta)\,\vec{e}_\theta\right)\end{aligned}$$

Ainsi on trouve avec la relation $\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \eta\,\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}))$:
- $\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{3Rv\eta}{r^3}\cos(\theta)$
- $\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = -\frac{3Rv\eta}{2r^3}\sin(\theta)$

La première équation intégrée permet d'écrire que :

$$p(r,\theta,\varphi) = \frac{3Rv\eta}{2r^2}\cos(\theta) + \alpha(\theta)$$

avec $\alpha(\theta)$ une constante d'intégration par rapport à r mais qui peut dépendre de θ. En dérivant cette relation par rapport à θ, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial\theta} = -\frac{3Rv\eta}{2r^2}\sin(\theta) + \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}$$