Planche 20

Question de cours

Énoncer la définition et le théorème sur les suites adjacentes.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice

On étudie la descendance d'une fleur dont le nombre de descendants suit la loi binomiale $\mathscr{B}(2, p)$ avec $p \in]0, 1[$ fixé. Les descendantes de la première fleur ont des descendantes de façon mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions que la première fleur. De plus, si une fleur a un ou des descendants, alors cela ne peut être qu'à la génération qui la succède.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n la probabilité de l'événement E_n : « Il n'y a plus de descendance à la génération n ».

1. Étude de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.
   (a) Calculer u_1.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$u_{n+1} = \big((1-p) + pu_n\big)^2$$
   (c) Étudier la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$. Quelle est sa limite ? Commenter les résultats obtenus.
2. Simulation informatique.
   (a) Rédiger une fonction informatique qui simule la descendance de la fleur sur une génération (c'est-à-dire qu'elle renvoie des nombres entiers 0, 1, 2 dont la répartition suivra la loi $\mathscr{B}(2, p)$), puis sur n générations.
   (b) Rédiger une deuxième fonction qui renvoie la fréquence d'extinction de la descendance après 20 générations sur un grand nombre de simulations.

Un corrigé

Question de cours

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

- ⋆ l'une est croissante ;
- ⋆ l'autre est décroissante ;
- ⋆ et si la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors ces deux suites sont convergentes de limite commune.

Commentaire

> La réponse à cette question de cours peut être donnée oralement.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice

Commentaire

> Le sujet de cette planche d'oral peut sembler court mais certaines questions (notamment les questions 1.(b) et 1.(c)) nécessitent un certain temps de réflexion.

Dans cet exercice, on désigne par X la variable aléatoire correspondant au nombre de descendantes de la première fleur. D'après l'énoncé, X suit la loi binomiale de paramètres 2 et p. On a donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et :

$$\forall k \in \{0,1,2\}, \qquad \mathrm{P}(X = k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}$$

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ On cherche $u_1 = \mathrm{P}(\mathrm{E}_1)$ qui est la probabilité que la première fleur n'ait pas de descendantes. Alors $\mathrm{E}_1 = (X = 0)$ et donc :

$$\boxed{u_1 = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^{2-0} = (1-p)^2}$$

Commentaire

> Cette question ne pose pas de problème mais il faut faire le lien avec la variable aléatoire X.

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ donc $\big\{(X=0),(X=1),X=2)\big\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule des probabilités totales nous donne :

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+1}) = \sum_{k=0}^{2} \mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+1}\,|X=k)\,\mathrm{P}(X=k)$$

Calculons les trois probabilités conditionnelles qui apparaissent dans cette somme.

- ⋆ Si la première fleur n'a pas de descendance (c'est-à-dire si $X=0$), alors il ne peut pas y avoir de descendance à la $(n+1)^{\mathrm{e}}$ génération (et l'événement E_{n+1} est réalisé). Autrement dit :
$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+1}\,|X=0) = 1$$
- ⋆ On suppose que la première fleur (relative à la génération 0) a une seule descendante (c'est-à-dire $X=1$). Il y a donc une unique fleur à la première génération. Cette fleur a une descendance dans les mêmes conditions que la première fleur d'après l'énoncé. Le processus recommence donc à partir de cette fleur et on s'intéresse alors à l'absence de descendance à la génération n (si on commence à compter à partir de cette première génération). Ainsi :
$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+1}\,|X=1) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_n) = u_n$$
- ⋆ Supposons enfin que la première fleur engendre deux fleurs (c'est-à-dire $X=2$). Chacune des ces deux fleurs a une descendance dans les mêmes conditions que la fleur mère, et indépendamment l'une de l'autre. On a donc :
$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+1}\,|X=2) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_n)\,\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) = u_n^2$$
car la numérotation recommence à partir de la génération 1.

Par ailleurs, comme X suit la loi binomiale de paramètres 2 et p, on a :

$$\mathrm{P}(X=0) = (1-p)^2, \qquad \mathrm{P}(X=1) = 2p(1-p) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(X=2) = p^2$$

donc :

$$u_{n+1} = (1-p)^2 + 2p(1-p)u_n + p^2u_n^2$$

Finalement, on trouve bien en factorisant :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \big((1-p) + pu_n\big)^2}$$

Probabilités

Commentaire

Il ne faut pas chercher directement à établir l'égalité telle qu'elle est écrite dans la question. Il faut d'abord se demander comment obtenir une relation entre u_n et u_{n+1}.

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. S'il n'y a plus de descendantes à la n^{e} génération, alors c'est aussi le cas à la $(n+1)^{\text{e}}$, ce qui signifie que $\mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_{n+1}$. Par croissance d'une probabilité, on a donc $\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+1})$, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Elle est de plus majorée par 1 (il s'agit d'une suite de probabilités), donc (d'après le théorème de la limite monotone) :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente}}$$

Notons ℓ sa limite. On sait que $\ell \in [0,1]$ car tous les termes de la suite sont compris entre 0 et 1. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence obtenue à la question 1.(b) (ce qui est licite car les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_{n+1})_{n\geqslant 1}$ sont convergentes de limite ℓ), il vient :

$$\ell = \big((1-p)+p\ell\big)^2$$

On remarque que $\ell_1 = 1$ est une solution évidente et comme cette équation du second degré se réécrit :

$$p^2\ell^2 + \big(2p(1-p)-1\big)\ell + (1-p)^2 = 0$$

on sait d'après les relations coefficients racines que l'autre racine est $\ell_2 = \dfrac{(1-p)^2}{p^2}$. Il reste encore à déterminer laquelle des deux limites convient. Commençons par déterminer les valeurs de $p \in]0,1[$ pour lesquelles $\ell_2 \in [0,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\ell_2 \in [0,1[\iff 0 \leqslant \frac{(1-p)^2}{p^2} < 1 &\iff 0 \leqslant (1-p)^2 < p^2 \qquad (\text{car } p^2 > 0)\\ &\iff 1-p < p\\ &\iff p > \frac{1}{2}\end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ (de la première à la deuxième ligne) et car $(1-p,p) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On distingue donc deux cas.

— **Premier cas :** $\boldsymbol{p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]}$

Dans ce cas, $\ell_2 \geqslant 1$ (d'après l'observation précédente) et comme la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'intervalle $[0,1]$, on a nécessairement $\ell = 1$.

— **Deuxième cas :** $\boldsymbol{p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[}$

On a ici $\ell_2 \in [0,1[$ (donc $\ell_2 < \ell_1$). Nous allons démontrer que $\ell = \ell_2$. Il s'agit donc d'exclure l'autre limite $\ell_1 = 1$. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leqslant \frac{(1-p)^2}{p^2}$$

On raisonne par récurrence en considérant la proposition $\mathscr{P}_n$: « $u_n \leqslant \dfrac{(1-p)^2}{p^2}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- ⋆ **Initialisation :** d'après la question 1.(a), on a $u_1 = (1-p)^2$ donc :

$$\frac{(1-p)^2}{p^2} - u_1 = (1-p)^2\left(\frac{1}{p^2}-1\right) = (1-p)^2\,\frac{(1-p)(1+p)}{p^2} \geqslant 0$$

car $p \in]0,1[$. Ainsi, $u_1 \leqslant \dfrac{(1-p)^2}{p^2}$ et donc la proposition $\mathscr{P}_1$ est vraie.

- ⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$. On a $u_n \leqslant \dfrac{(1-p)^2}{p^2}$ par hypothèse de récurrence. En multipliant par $p \geqslant 0$ et en ajoutant $1-p$, il vient :

$$0 \leqslant (1-p) + pu_n \leqslant (1-p) + \frac{(1-p)^2}{p} = \frac{1-p}{p}$$

Comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$u_{n+1} = \big((1-p)+pu_n\big)^2 \leqslant \frac{(1-p)^2}{p^2}$$

et donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- ⋆ **Conclusion :** par principe de récurrence simple, on a $u_n \leqslant \ell_2 < \ell_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans ce deuxième cas, on a donc $\ell = \ell_2$.

Finalement :

$$\boxed{\text{si } p \in \left]0,\frac{1}{2}\right], \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \text{ et si } p \in \left]\frac{1}{2},1\right[, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{(1-p)^2}{p^2}}$$

On peut faire l'interprétation suivante :

> si la probabilité p (d'engendrer une fleur) est inférieure à $\frac{1}{2}$, alors la population de fleurs s'éteint presque sûrement ; sinon, la probabilité que la population s'éteigne n'est pas égale à 1 et la lignée de fleurs peut donc perdurer dans le temps

Commentaires

▷ Remarquons que la question 1.(b) n'a pas été utilisée pour justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On a simplement mis en relation les événements E_n et E_{n+1} (et il n'y a pas eu de calcul à faire).

▷ L'étude classique des différences successives $u_{n+1} - u_n$ (en utilisant la question 1.(b)) est compliquée. Signalons qu'on peut aussi facilement démontrer la croissance de la suite en utilisant un raisonnement par récurrence simple (en considérant, pour tout entier naturel n non nul, la proposition $\mathscr{P}_n$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ »). Il faut alors calculer u_2 et le comparer à u_1. On utilise ensuite la relation de la question 1.(b) pour l'hérédité.

▷ Il ne faut pas conclure hâtivement que la limite de la suite vaut 1, tout dépend de la position des termes de la suite vis à vis de ces limites potentielles.

▷ Les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme du second degré permettent de déterminer rapidement les racines du polynôme dès lors qu'on a réussi à en deviner une.

2.(a) On écrit une première fonction qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

```
import random as rd

def bernoulli(p) :
     x = rd.random()
     if (x < p) :
          return 1
     else :
          return 0
```

La variable aléatoire X est la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. La fonction suivante permet donc de simuler la descendance d'une fleur (sur une génération).

```
def une_generation(p) :
     s = 0
     return bernoulli(p)+bernoulli(p)
```

La fonction suivante permet de simuler la descendance de la première fleur en renvoyant le nombre de descendants `nb_fleurs` à la génération n. Ce nombre de fleurs `nb_fleurs` est initialement égal à 1 (à la génération 0, il n'y a que la fleur mère). Le nombre de descendants à la génération $k+1$ est calculé sur la base des descendants de la génération précédente. Pour chacune des nouvelles fleurs de la génération k, on simule la descendance à l'aide de la fonction `une_generation`. La variable `nb_petites_fleurs` permet de calculer le nombre de descendants génération après génération.

```
def generation_n(n,p) :
     nb_fleurs = 1 #une seule fleur initialement
     for k in range(n) :
          nb_petites_fleurs = 0
          for i in range(nb_fleurs) :
               nb_petites_fleurs += une_generation(p)
          nb_fleurs = nb_petites_fleurs
     return nb_fleurs
```

Commentaires

> ▷ La simulation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale doit être à la portée de tout candidat admissible selon le rapport du jury.
>
> ▷ L'effectif qui nous intéresse ici est le nombre de *descendants* génération après génération.

2.(b) On simule N fois la descendance de la première fleur et on calcule la fréquence d'extinction sur 20 générations. Une descendance est simulée avec la fonction `generation_n` précédente pour le choix $n = 20$. À chaque simulation, on observe si la population s'est éteinte à la 20^{e} génération.

```
def frequence(N,p) :
     s = 0
     for k in range(N) :
          if (generation_n(20,p) == 0) :
               s += 1
     return s/N
```

En exécutant plusieurs fois cette fonction pour des valeurs de N *assez grandes*, on observe bien le phénomène démontré à la question 1.(c), notamment l'extinction presque sûre de la population de fleurs pour $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. L'approximation des probabilités par une fréquence est corroborée par la loi faible des grands nombres.

Planche 21

Question de cours

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, alors $X+Y$ est une variable à densité dont une densité h est donnée par le produit de convolution suivant :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

On rappelle aussi qu'en `python`, la fonction `random()` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si on a l'inégalité $x^2 - y > 0$.

   Indication : on pourra commencer par étudier le nombre de valeurs propres de la matrice A dans le cas où elle est diagonalisable.

2. Soient X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et Y.

   (a) Écrire une fonction informatique qui calcule une valeur approchée de la probabilité $\mathrm{P}(X^2 - Y > 0)$.

   (b) Montrer que les variables aléatoires X^2 et $-Y$ admettent une densité. Déterminer une densité de chacune de ces variables.

   (c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

   $$h : z \longmapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Probabilités