Chapitre X

Produit scalaire et relations métriques

1. Pré-requis

Il est nécessaire de connaître la caractérisation de l'orthogonalité par le produit scalaire (cf. chapitre III) et de maîtriser la lecture du cercle trigonométrique (cf. chapitre IX).

1.1. Relation de Chasles et décomposition d'un vecteur

Exercice X.1.1.1.

Exprimer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ et $\vec{s}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

b) $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right)$

c) $\vec{r} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

d) $\vec{s} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{AB}$

Exercice X.1.1.2.

Soit ABC un triangle et D, E, F les points définis par $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice X.1.1.3.

Soit ABC un triangle, P le milieu du segment [BC] et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

a) exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) exprimer alors le vecteur $\overrightarrow{MP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Exercice X.1.1.4.

Soit ABCD un parallélogramme, on note I le milieu du côté [CD], J celui du côté [AD] et K le milieu du segment [AJ].

a) exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$

b) exprimer alors les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$

Corrections

Exercice X.1.1.1.

Rappel Pour tous points M, N, P la relation de Chasles permet d'écrire $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Méthode

Dans ce premier exercice, seul le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est à transformer afin de faire apparaître les vecteurs $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{AC}$. La relation de Chasles va permettre de décomposer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

a)
$$\begin{aligned} \vec{u} &= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

b) $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{6}\overrightarrow{AC}$ car $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

⚠ **Ne pas oublier les parenthèses lorsqu'on écrit le vecteur $\overrightarrow{BC}$ comme $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ car le coefficient $\frac{1}{2}$ porte sur l'ensemble des vecteurs qui remplacent le vecteur $\overrightarrow{BC}$!**

c) $\vec{r} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= -\overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$= -\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

⚠ **Là encore les parenthèses sont indispensables mais malheureusement souvent oubliées !**

d) $\vec{s} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{AB}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ car $-\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$= -2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

Exercice X.1.1.2.

Conseil Dans les exercices de décomposition de vecteurs dans une base, il faut procéder avec méthode :

- traduire les données de l'énoncé en relations vectorielles (parallélogramme, milieu) et ainsi visualiser toutes les relations dont on dispose
- s'aider d'une figure, même si elle n'est pas demandée ainsi les « chemins » à suivre pour la décomposition peuvent être visualisés
- à chaque étape se poser la question « quels vecteurs dois-je conserver et de quels vecteurs dois-je me débarrasser ? ». Pour se débarrasser efficacement d'un vecteur, il faut avoir en tête les relations vectorielles de l'énoncé, ce sont elles qui permettent de savoir quelle relation de Chasles utiliser (quel point introduire)
- ne jamais défaire ce que l'on vient de faire (par exemple si on a remplacé $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, il ne faut pas ensuite utiliser la relation de Chasles pour écrire $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$)
- ne pas vouloir aller trop vite, il vaut mieux travailler vecteur par vecteur que de vouloir en traiter deux en même temps

Expression du vecteur $\overrightarrow{AD}$:

On exprime en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par conséquent le vecteur $\overrightarrow{CA}$ est à conserver et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ à transformer.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA}\\ &= 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + 3\overrightarrow{CA}\\ &= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC}\\ &= -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Expression du vecteur $\overrightarrow{AE}$:

On souhaite exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$, or le point E est défini par la relation $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Il faut donc commencer par transformer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ afin de faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{BE}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Expression du vecteur $\overrightarrow{AF}$:

On souhaite décomposer le vecteur $\overrightarrow{AF}$, or le point F est défini par la relation $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. Il faut donc commencer par transformer le vecteur $\overrightarrow{AF}$ afin de faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{BF}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\\ &= \overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ &= -2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Il faut maintenant décomposer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ (cf. décomposition du vecteur $\overrightarrow{AD}$).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= -2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ &= -2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\\ &= -2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AF}=-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Exercice X.1.1.3.

a) **Méthode**

- La première chose à faire est de traduire la donnée P milieu de [BC] sous forme de relations vectorielles.

$$\begin{aligned}P \text{ milieu de } [BC] &\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BP}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}\end{aligned}$$

On souhaite exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$, or dans les relations précédentes le point P est lié aux points B ou C. Il est donc judicieux d'introduire l'un de ces deux points dans le vecteur $\overrightarrow{AP}$. Introduire le point B nous permettra d'utiliser la deuxième relation vectorielle.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) **Méthode**

- Le terme « alors » signifie qu'il faut utiliser la question précédente. Puisqu'on souhaite exprimer le vecteur $\overrightarrow{MP}$, on commence donc par écrire $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}$ pour ensuite utiliser la question précédente.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}\\ &= -\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}\\ &= -\left(2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AP}\\ &= -2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}\\ &= -2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{MP}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{2}\overrightarrow{AC}$.

⚠ **Ne pas oublier les parenthèses lorsqu'on remplace $\overrightarrow{AM}$ par $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$**

Exercice X.1.1.4.

a) **Méthode**

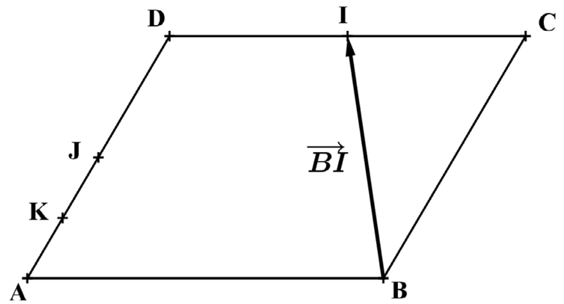
- Comme pour l'exercice précédent, nous allons commencer par traduire les hypothèses sous forme vectorielle (seules seront données les relations qui seront utilisées dans l'exercice). Même si elle n'est pas demandée, nous allons construire une figure afin de visualiser les vecteurs à décomposer.

Vecteur $\overrightarrow{BI}$:

$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

I est le milieu de $[CD]$ donc $\overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

Pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{BI}$ en s'aidant de la figure, il faut chercher le chemin le plus simple pour aller du point B au point I. D'après la figure, pour cette question il faut passer par le point C.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}\\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

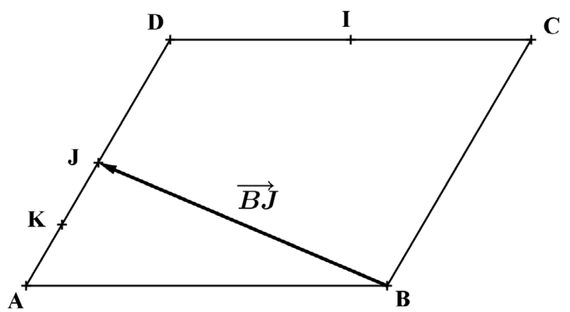
Ainsi $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Vecteur $\overrightarrow{BJ}$:

$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

J est le milieu de $[AD]$ donc $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

D'après la figure, le chemin le plus simple pour aller du point B au point J se fait en passant par le point A.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BJ} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}\\ &= \overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Vecteur $\overrightarrow{BK}$:

$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

J est le milieu de $[AD]$ donc $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

K est le milieu de $[AJ]$ donc $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$

D'après la figure, le chemin le plus simple pour aller du point B au point K se fait en passant par le point A.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\\ &= \overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}\\ &= \overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$