

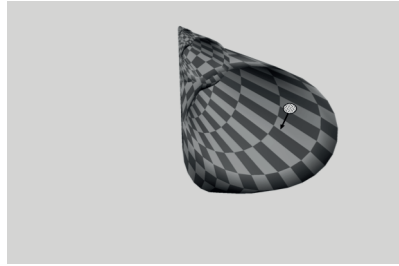
Leçon 1 : Contact entre deux solides. Frottement

Conseils méthodologiques	
Prérequis	Mécanique du point matériel Cinématique et dynamique du solide
Compétences à acquérir	Modélisation macroscopique d'une interaction d'origine microscopique Lois phénoménologiques du frottement sec
A développer	Développer diverses situations mécaniques : dans le champ de pesanteur, avec une force de rappel élastique Développer une application concrète : La roue motrice ou l'arc-boutement
Introduction à la leçon 1	
<p><i>Dans de nombreuses situations mécaniques, il existe des contacts entre solides en mouvement relatif. C'est bien évidemment le cas de la plupart des systèmes locomoteurs classiques : contact pneu-bitume pour les voitures, contact rail-roue motrice du train.</i></p> <p><i>On essaiera dans un premier temps de dégager les lois phénoménologiques qui régissent le contact entre deux solides. Nous étudierons ensuite quelques situations simples dans le champ de pesanteur puis dans un potentiel élastique.</i></p> <p>La tribologie du grec τριβος, « frottement » et λόγος, « science, étude » est l'étude du frottement de contact d'un point de vue phénoménologique mais aussi pratique, il va des phénomènes d'usure à l'étude expérimentale de la lubrification.</p>	

Que se passe-t-il lorsque deux solides en contact sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre ? Comment peut-on modéliser d'un point de vue macroscopique les interactions microscopiques existant au niveau du contact ?

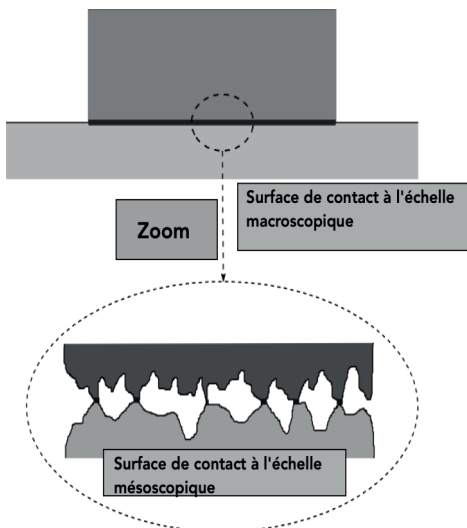
Tel est l'objet de cette leçon !

Dans ce cours, \vec{P} désignera le poids du solide. Le champ de pesanteur terrestre sera supposé uniforme et constant.



1 Modélisation microscopique et macroscopique des forces de contact

1.1 Historique



L'origine du frottement de contact a longtemps été attribuée à des phénomènes de rugosité.

En effet, si une surface de contact apparaît plane à l'échelle macroscopique, on comprend bien qu'il n'en est rien à une échelle mésoscopique. A cette échelle, la surface apparaît irrégulière et rugueuse avec des contacts ponctuels au niveau des rugosités et responsables du frottement sec.

Le premier à s'y intéresser sérieusement fut Léonard de Vinci à la Renaissance. Ce fut toutefois le physicien français, Guillaume Amontons (1663 – 1705) puis Coulomb qui devaient en formuler les lois phénoménologiques, en étudiant le frottement des cordes de marines sur les poulies puis celui de surfaces planes les unes avec les autres.

Ils en déduisent alors les lois phénoménologiques classiques.

- Amontons émet l'idée que le frottement est proportionnel à la « charge » perpendiculaire à la surface de contact. Nous dirions aujourd'hui qu'il est proportionnel aux forces normales qu'exerce un solide sur l'autre solide, sur toute la surface de contact. Il explique cela par une augmentation des points de contacts de rugosité sous la contrainte normale. Par ailleurs, et bien que ce soit peu intuitif, il constate que la résistance ne dépend pas de la surface en contact mais uniquement de la charge normale. Un solide exerçant une même « charge normale » mais sur une surface plus petite subit donc la même contrainte tangentielle de frottement. Coulomb établit quant à lui expérimentalement que lorsque les deux surfaces glissent l'une par rapport à l'autre, la force tangentielle de frottement ne dépend pas non plus de la valeur de la vitesse de glissement relative des deux surfaces entre elles.

- La **nano tribologie** qui s'est développée depuis les années 50 montrent que si la force de frottement ne dépend effectivement pas de la surface macroscopique de contact, la rugosité ne saurait constituer une explication suffisante du phénomène de frottement sec. Des surfaces très lisses en contact peuvent ainsi présenter un fort phénomène de frottement.

C'est notamment le cas de la « soudure à froid » où des surfaces métalliques fortement polies adhèrent parfaitement.

1.2 Lois phénoménologiques de Coulomb du frottement sec pour un solide en translation

On étudie ici le cas simple d'un solide indéformable et astreint à se déplacer tout en restant en contact avec une surface fixe. Le contact entre le solide et la surface est supposé quasi ponctuel. Si ce contact peut être rompu, on parle de **liaison unilatérale**. Des interactions microscopiques de nature électromagnétique et difficilement modélisables, se font au niveau des points de contact des rugosités ou points d'adhérence. Elles s'opposent à l'interpénétrabilité des deux solides ainsi qu'au glissement relatif de l'un par rapport à l'autre.

Dans un premier temps, nous modéliserons cette interaction de contact par une force dont le point d'application est supposé être le point de contact entre les deux solides, noté I .

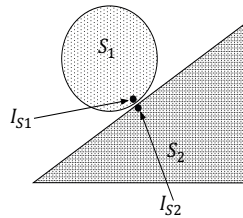
1.2.1 Vitesse de glissement

On appelle alors I_{S_1} le point du solide S_1 qui est confondu à l'instant t avec le point de contact I . On peut définir de même le point I_{S_2} qui est le point du solide S_2 confondu à l'instant t avec le point de contact I .

A deux instants différents, ce sont des points distincts du solide étudié.

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow I_{S_1}(t_1) \neq I_{S_1}(t_2)$$

Le point I est le point de l'espace affine qui coïncide à une date t avec les deux autres points. Ce point est un point de l'espace affine qui n'appartient à aucun des deux solides.



Vitesse de glissement

On appelle vitesse de glissement du solide S_1 par rapport au solide S_2 , la vitesse $\vec{v}_g(t)$ indépendante du référentiel d'étude et d'expression :

$$\vec{v}_g(t) = \vec{v}_{I_{S_1}}(t) - \vec{v}_{I_{S_2}}(t)$$

On se place généralement dans le référentiel d'un des solides, par exemple S_2 .

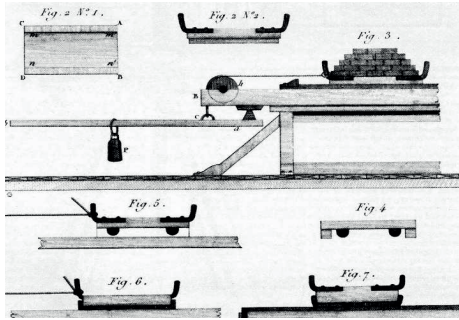
$$\text{Dans le référentiel lié à } S_2, \text{ on a alors : } \vec{v}_g(t) = \vec{v}_{I_{S_1}}(t)$$

1.2.2 Lois phénoménologiques de Amontons-Coulomb du frottement sec pour un solide en translation

Coulomb s'est intéressé tout d'abord au solide en translation ne pouvant ni rouler ni basculer sur un support guide. Il étudia ensuite des situations plus complexes de solides pouvant rouler.

L'étude des solides en **translation** sur un guide fixe présente l'avantage de marquer une frontière nette entre glissement et non glissement.

En effet, le non-glissement sur un support fixe correspond à une situation statique où le solide est immobile. Le glissement correspond quant à lui à une situation dynamique de translation.



- Envisageons donc la situation élémentaire où l'on veut simplement faire glisser une caisse de livres sur un support solide fixe. On exerce pour ce faire une force \vec{F} dans le sens du mouvement souhaité.

En deçà d'une certaine traction, la caisse de livres ne glisse pas. C'est la situation dite d'adhérence ou de frottement statique. Une force s'oppose donc à la traction. Elle est colinéaire à \vec{F} , de sens opposé et lui est alors égale en module.

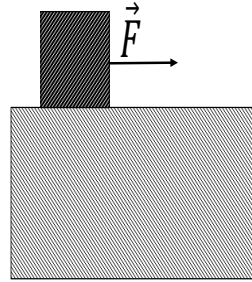
On l'appelle **réaction tangentielle** ou force de frottement statique.

Nous la noterons : \vec{R}_T

- Par ailleurs, la non-inter-pénétrabilité des deux solide se traduit par une force de contact normale au support et que nous appellerons **réaction normale**.

Nous la noterons : \vec{R}_N

- Si l'on continue ensuite d'augmenter la force de traction, elle atteint alors une valeur critique où l'objet se met à glisser. On constate expérimentalement que la force de traction « critique » est proportionnelle à la norme de la réaction normale ou « charge normale ».



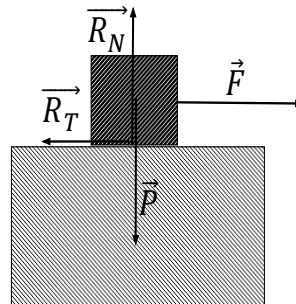
C'est la loi de Coulomb du frottement statique.

Force de frottement statique au voisinage du glissement : $\vec{R}_T = -f_s |\vec{R}_n| \hat{u}$ où $\hat{u} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$

Le coefficient f_s sans dimension est appelé coefficient de frottement statique.

On notera que tout le long de la phase **statique**, on a la relation ci-dessous :

$$\text{Phase statique} \Rightarrow |\vec{R}_T| \leq f_s |\vec{R}_n|.$$



La réaction demeure alors dans un cône dit de cône de frottement d'ouverture : $\tan \alpha = f_s$

A partir de l'instant où l'objet glisse, s'installe une force de frottement sec **dynamique** qui **s'oppose à ce glissement**. Cette force est alors simplement proportionnelle à la réaction normale du support avec un coefficient de frottement noté f_D et appelé coefficient de frottement dynamique. Elle est opposée à la vitesse de glissement.

$$\text{Phase dynamique de glissement} \Rightarrow \vec{R}_T = -f_D |\vec{R}_n| \frac{\vec{v}_g}{|\vec{v}_g|}$$

On a tous constaté expérimentalement que pour déplacer une armoire, le plus difficile est d'abord d'amorcer le glissement. Le glissement dynamique demande ensuite beaucoup moins d'efforts.

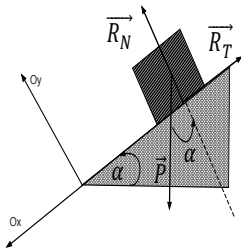
Cela vaut dire qu'en pratique, on a toujours : $f_D \leq f_S$

1.3 Notion de plage d'équilibre du mouvement guidé sur un surface de contact fixe

On appelle plage d'équilibre d'un mouvement de translation en présence de frottement sec, le domaine statique du solide. C'est le domaine pour lequel la contrainte géométrique imposée par le support et la condition pour une phase statique $|\vec{R}_T| \leq f_S |\vec{R}_n|$ sont vérifiées. Si le solide se trouve dans cette plage d'équilibre avec une vitesse nulle alors il y reste indéfiniment et la réaction reste dans le cône de frottement.

Exemple 1 : Solide sur un plan incliné

Un solide est astreint à se déplacer en translation rectiligne sur un plan incliné selon un axe Ox .



On fait l'hypothèse statique. En projetant les forces selon les axes Ox et Oy , on obtient :

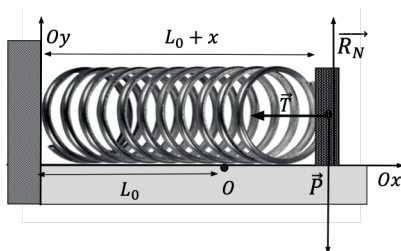
$$\begin{cases} |\vec{R}_n| = mg \cos \alpha \\ |\vec{R}_T| = mg \sin \alpha \end{cases}$$

Plage d'équilibre : notre hypothèse est fondée si $\frac{|\vec{R}_T|}{|\vec{R}_n|} \leq f_S \Rightarrow \tan \alpha \leq f_S$ (E1)

Un solide de vitesse initiale nulle reste donc statique tant que l'inclinaison du support vérifie l'équation (E1). Le coefficient de frottement statique f_S prend ici une dimension physique puisque que c'est la tangente de l'angle à partir duquel un solide posé sur un plan incliné dans la direction de plus grande pente se met à glisser.

Exemple 2 : Solide en translation horizontale accroché à un ressort

Un solide accroché à un ressort glisse sur un support horizontal. On appelle f_S le coefficient de frottement statique entre le solide et le plan horizontal du mouvement. On fait à nouveau l'hypothèse statique du solide. On appelle \vec{T} la tension élastique du ressort de raideur k , dont l'allongement par rapport à sa longueur à vide est x .



En projetant les forces selon les axes Ox et Oy , on obtient :

$$\begin{cases} |\vec{R}_n| = mg \\ |\vec{R}_T| = k|x| \end{cases}$$

Notre hypothèse est fondée si : $\frac{|\vec{R}_T|}{|\vec{R}_n|} \leq f_S$

$$\Rightarrow |x| \leq f_S \frac{mg}{k} \quad (E1)$$

Si le solide, supposé en mouvement, entre dans cette « plage » d'équilibre avec **une vitesse nulle**, il s'y arrête. S'il est initialement dans cette plage avec une vitesse initiale nulle, il y reste indéfiniment.

1.3.1 Ordres de grandeur et commentaires physique

Les coefficients de frottement ne dépendent que de la nature des matériaux et de la modélisation délicate du contact rarement ponctuel. On mesure les valeurs suivantes pour un contact non lubrifié.

Nature du contact	f_s
Acier-Acier	0,18
Acier-Fonte	0,19
Acier-Bronze	0,11
Acier-Téflon	0,04
Bois-Bois	0,65
Pneu-Route	0,80

Les contacts métaux-métaux présentent un coefficient de frottement moins élevé qu'une structure organique cellulosique (Bois-Bois). On constate que l'adhérence pneu-route est élevée ce qui évite le glissement sur une route sèche et limite aussi le risque d'aqua planning sur une route mouillée.

1.4 Lois phénoménologiques de Coulomb du frottement sec pour un solide en mouvement quelconque

Dans ce cas, le non-glissement n'est pas synonyme de position statique. Le solide peut rouler et la force de frottement joue d'ailleurs un rôle essentiel dans ce roulement. C'est aussi le cas où le guide est mobile. Dans ce cas, le non-glissement ne correspond pas à un cas statique, même pour un mouvement de translation.

Phases du mouvement d'un solide pouvant rouler en présence de frottement sec	
$\frac{ \vec{R}_T }{ \vec{R}_n } \leq f_s$	Roulement sans glissement du solide
$\frac{ \vec{R}_T }{ \vec{R}_n } = f_D$	Glissement du solide avec frottement sec dynamique

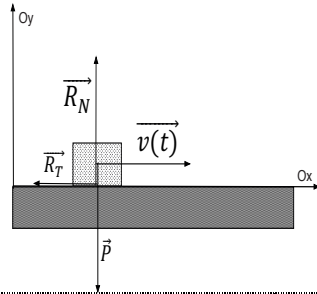
2 Mouvements de translation avec frottement sec

2.1 Mouvement guidé sur un plan horizontal

2.1.1 Portrait de phase et distance d'arrêt

On étudie la situation où un solide est lancé avec une vitesse initiale \vec{v}_0 sur un plan horizontal de coefficient de frottement dynamique f_D .

Sans frottement, le solide poursuivrait sa route avec un mouvement rectiligne uniforme. C'est le principe d'inertie puisque le poids et la réaction normale se compensent sans mouvement vertical.



La force de frottement sec agit alors comme une force de freinage qui finit par arrêter le solide. On peut calculer aisément la distance d'arrêt d_A en utilisant un tableau de bilan d'énergies.

État mécanique du solide	Énergie cinétique	Énergie potentielle
Départ	$\frac{1}{2}mv_0^2$	0
État intermédiaire	$\frac{1}{2}mV(x)^2$	0
Arrêt au point A	0	0

L'application du théorème de l'énergie mécanique entre le départ du mouvement et l'arrêt donne :

$$[0 + 0] - \left[\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \right] = W_{\vec{R}_N} + W_{\vec{R}_T}$$

Le travail de la réaction normale est nul puisque celle-ci est constamment orthogonale à la vitesse et n'apporte de ce fait aucune énergie au mouvement.

La réaction tangentielle obéit à la loi de coulomb :

$$\text{Loi de Coulomb} \Rightarrow \vec{R}_T = -f_D |\vec{R}_N| \hat{u}_x \Rightarrow \vec{R}_T = -f_D mg \hat{u}_x$$

Appelons Γ le chemin rectiligne qui mène du point de départ au point d'arrêt A.

$$W_{\vec{R}_T} = \int_{\Gamma} \vec{R}_T \cdot d\vec{OM} = \vec{R}_T \cdot \vec{OA} \text{ car } \vec{R}_T \text{ est uniforme et constante.}$$

$$\text{On a donc in fine : } -\frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D mg d_A \Rightarrow d_A = \frac{v_0^2}{2gf_D}$$

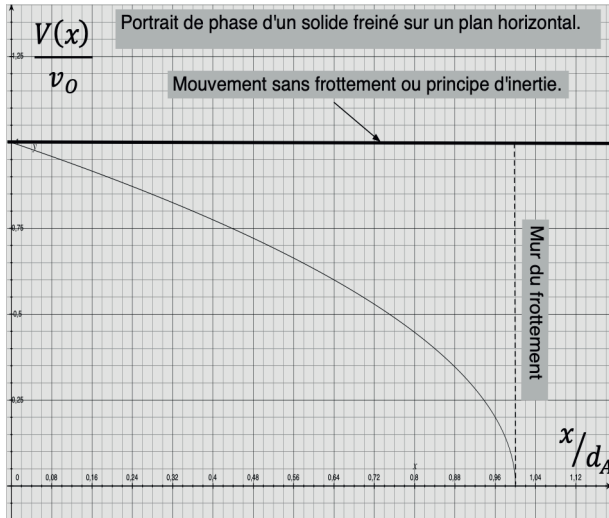
- Le résultat est homogène puisque $v_0^2/2g$ s'identifie à la hauteur atteinte dans un lancer vertical sans frottement, elle est donc bien homogène à une longueur. On notera que pour un coefficient de frottement de 0.1 , le solide s'arrête au bout de dix fois cette hauteur. Ce peut être une nouvelle interprétation physique du coefficient de frottement dynamique.

- On peut alors déterminer le portrait de phase du mouvement en écrivant maintenant le théorème de l'énergie mécanique entre un point intermédiaire et le point de départ.

$$\text{Portrait de phase} \Rightarrow \frac{1}{2}mV(x)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D mgx \Rightarrow V(x)^2 = v_0^2 [1 - x/d_A]$$

La ligne de phase du portrait est donc une branche de parabole d'équation :

$$V(x) = v_0 \sqrt{[1 - x/d_A]}$$



La vitesse décroît car la puissance de la force de frottement sec est toujours négative et donc $dE_c/dt < 0$.

Le mouvement est initialement un mouvement de glissement et la plage d'équilibre couvre tout l'axe Ox dès lors que le point s'y trouve avec une vitesse nulle.

Le point s'arrête donc définitivement dès que sa vitesse s'annule.

Immédiatement après l'arrêt, la réaction tangentielle s'annule.

2.1.2 Lois horaires du mouvement

Elles résultent de l'application immédiate de la seconde loi de Newton.

$$\text{Deuxième loi de Newton} \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -f_D mg \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_0 - f_D g t \Rightarrow t_A = \frac{v_0}{f_D g} \\ x(t) = v_0 t \left(1 - \frac{t}{2t_A}\right) \end{cases}$$

- On a un mouvement rectiligne uniformément décéléré. On notera la relation entre la distance et le temps d'arrêt $\Rightarrow d_A = v_0 t_A / 2$.
- On notera qu'il existe une discontinuité de l'accélération au moment de l'arrêt.

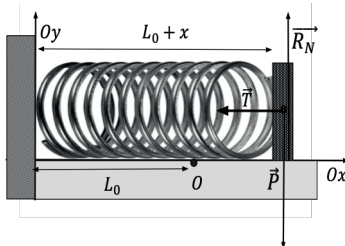
$$\left[\left(\frac{dv_x}{dt} \right)_{t=t_A^-} = -f_D g \right] \neq \left[\left(\frac{dv_x}{dt} \right)_{t=t_A^+} = 0 \right]$$

2.2 Approche géométrique d'un mouvement d'oscillation avec frottement sec

2.2.1 Position du problème

Un solide lié à un ressort de raideur K et de longueur à vide L_0 glisse sur un support horizontal. On appelle f_S le coefficient de frottement statique entre le solide et le plan horizontal du mouvement et on suppose ici que $f_S \approx f_D = f$.

Le solide est lâché **sans vitesse initiale** avec une position initiale $x(0)$ donnée et mesurée à partir de la longueur à vide. On suppose ici : $x(0) = 10,5 fmg/K$ et $\dot{x}(0) = 0$.



La longueur initiale du ressort vaut donc :

$$l(0) = L_0 + 10,5 fmg/K$$

On commence tout d'abord par étudier la plage d'équilibre du solide.

On appelle \vec{T} la tension élastique du ressort de raideur K et x l'allongement par rapport à sa longueur à vide.