Chapitre 2- Dynamique des fluides parfaits

I. Cinématique des fluides parfaits

1. Rétrécissement en canalisation [☆]

Dans un système de distribution d'eau potable, la vitesse maximale ne doit pas excéder 3 m/s. Si la condition de vitesse maximale est respectée dans la première conduite de diamètre $D_1 = 0{,}6$ m, pour le réseau figure II.1, peut on considérer que la condition est également respectée dans la seconde conduite de diamètre $D_2 = 0{,}3$ m ?

Remarque : les conduites ont une section circulaire.

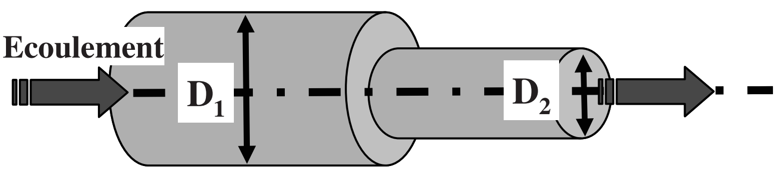

Figure II.1 - Schéma du rétrécissement de canalisation

◗ *Réponse*

Immédiat : avec l'hypothèse de régime permanent, de fluide parfait et incompressible, on a la conservation du débit volumique qui donne alors:

$$Q_{V1} = Q_{V2} = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2$$

Et donc :

$$V_2 = V_1 \times \frac{S_1}{S_2} = V_1 \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \Rightarrow V_2 = 12 \text{ m/s}$$

Donc, non la condition n'est pas respectée !

2. Ramification de canalisation [☆]

De l'eau s'écoule régulièrement dans un réseau de canalisations cylindriques schématisées sur la figure II.2.

On constate :

– Entre A et B, la vitesse dans la canalisation de diamètre $D_1 = 1{,}5$ m est de $V_1 = 2$ m/s ;
– Entre B et C, le débit se conserve dans la canalisation de diamètre $D_2 = 1{,}2$ m ;

– Au point C, la canalisation se sépare en 2 branches : la branche CD de diamètre D_3 = 0,8 m transporte uniquement 1/3 de l'écoulement total et la vitesse mesurée dans la branche CE de diamètre D_4 est V_4 = 2,5 m/s.

Remarque : les conduites ont une section circulaire.

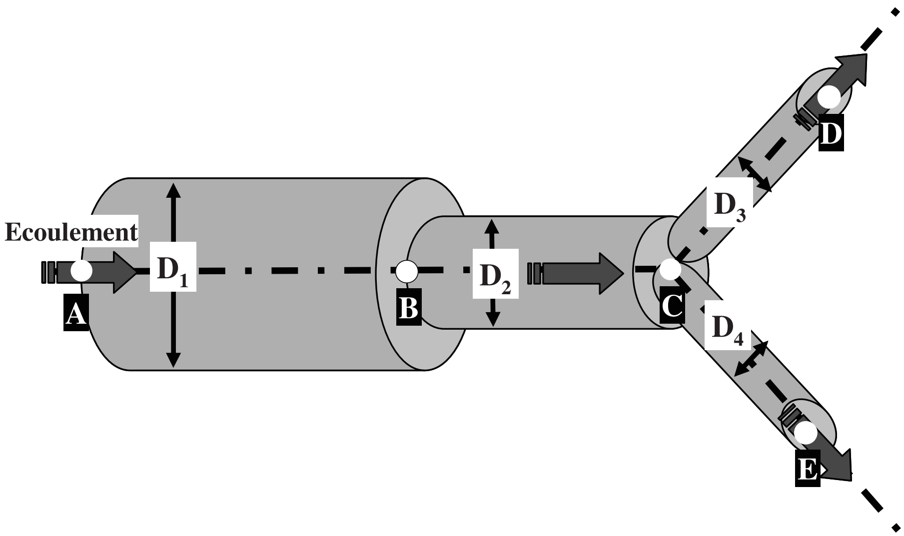

Figure II.2- Schéma du réseau ramifié

a. Débit volumique : Q_{V1}

On demande de déterminer le débit volumique dans la branche AB noté Q_{V1}.

◗ *Réponse*

Immédiat car avec l'hypothèse de régime permanent, de fluide parfait et incompressible, on a, par exemple :

$$Q_{V1} = S_1 \times V_1 = \left(\frac{\pi D_1^2}{4}\right) \times V_1 = 3.53\ m^3/s$$

b. Vitesse moyenne dans la branche BC

On demande de déterminer la vitesse V_2 dans la branche BC.

◗ *Réponse*

Immédiat car avec l'hypothèse de régime permanent, de fluide parfait et incompressible, on a, par exemple :

$$Q_{V1} = Q_{V2} = cte \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \times V_1 = \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \times V_2$$

Et donc :

$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 3{,}12 \text{ m/s}$$

c. Vitesse moyenne dans la branche CD

On demande de déterminer la vitesse V_3 dans la branche CD.

◗ *Réponse*

Immédiat car avec l'hypothèse de régime permanent, de fluide parfait et incompressible, on a, par exemple :

$$Q_{V3} = \frac{Q_{V1}}{3} = \frac{Q_{V2}}{3} = 1{,}18 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{et} \quad S_3 \times V_3 = Q_{V3}$$

Et donc :

$$V_3 = \left(\frac{4}{\pi D_3^2}\right) \times \frac{Q_{V1}}{3} \quad \Rightarrow V_3 = 2{,}34 \text{ m/s}$$

d. Débit volumique : Q_{V4}

On demande de déterminer le débit volumique dans la branche CE noté Q_{V4}.

◗ *Réponse*

Immédiat car avec l'hypothèse de régime permanent, de fluide parfait et incompressible, on a, par exemple :

$$Q_{V3} + Q_{V4} = Q_{V1} = Q_{V2} \Leftrightarrow Q_{V4} = Q_{V1} - \frac{Q_{V1}}{3} = \frac{2Q_{V1}}{3} = 2{,}354 \text{ m}^3/\text{s}$$

e. Diamètre : D_4

On demande de déterminer le diamètre D_4 dans la branche CE.

◗ *Réponse*

Immédiat car avec l'hypothèse de régime permanent, de fluide parfait et incompressible, on a, par exemple :

$$Q_{V4} = S_4 \times V_4 = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad Q_{V4} = \left(\frac{\pi D_4^2}{4}\right) \times V_4 \Leftrightarrow \quad D_4 = \sqrt{\frac{4Q_{V4}}{\pi V_4}} = 1{,}095 \text{ m}$$

3. Réservoir à double alimentation [☆☆]

Soit l'installation schématisée figure II.3 qui comprend un réservoir (de hauteur de surface libre notée h et de diamètre cylindrique D) alimenté en 2 points : point 1 avec un débit constant Q_{V1} = 0,05 m^3/s et point 2 à partir d'une canalisation cylindrique de diamètre D_2 = 10 cm et pour laquelle on a une vitesse constante

V_2 = 2 m/s et un débit Q_{V2}. Ce réservoir en régime permanent incompressible possède sur son fond une liaison à l'air libre et reliée à une canalisation cylindrique de diamètre D_3 = 7 cm par laquelle se vidange l'eau.

On souhaite étudier 2 cas de vidange :

– 1er cas : la variation de vitesse moyenne dans le réservoir (V_R) varie en fonction du temps : $V_R = f(t)$;
– 2ème cas : la hauteur h dans le réservoir est maintenue constante h = cte.

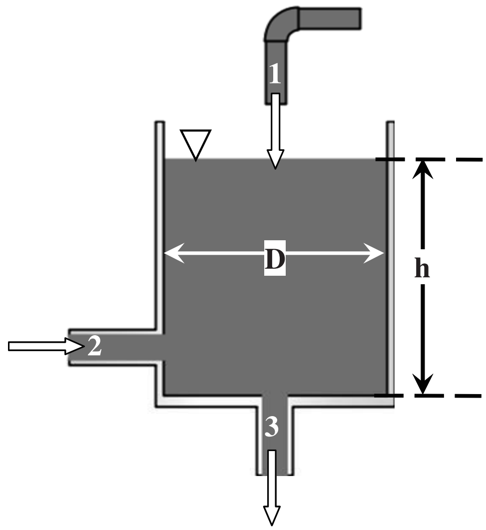

Figure II.3- Schéma du réservoir à double alimentation

a. Variation de la vitesse moyenne du réservoir

On demande de déterminer dans le cas 1 ($V_R = f(t)$), l'expression analytique de la variation du niveau de la surface libre (dh/dt) dans le réservoir en fonction de Q_{V1}, Q_{V2}, Q_{V3} et D.

◗ *Réponse*

Immédiat : avec l'hypothèse de régime permanent, de fluide parfait et incompressible, on a :

$$Q_{VR} = S_R \times V_R = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \times V_R \qquad [1]$$

Or, comme la hauteur h varie au cours du temps :

$$h = f(t) \text{ et } V_R = \frac{dh}{dt} \qquad [2]$$

De plus :

$$Q_{VR} = Q_{V1} + Q_{V2} - Q_{V3} \qquad [3]$$

D'où, avec [1], [2] et [3] :

$$Q_{V1} + Q_{V2} - Q_{V3} = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \times \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\left(Q_{V1} + Q_{V2} - Q_{V3}\right)}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} \qquad [4]$$

b. Maintien de la vitesse moyenne constante du réservoir

On demande dans le cas 2 (h = cte), de déterminer la vitesse V_3.

◗ *Réponse*

Immédiat : si h = cte alors [4] devient :

$$Q_{V1} + Q_{V2} - Q_{V3} = 0 \quad \Leftrightarrow Q_{V3} = Q_{V1} + Q_{V2}$$

Soit :

$$V_3 \times \left(\frac{\pi D_3^2}{4}\right) = Q_{V1} + \left[V_2 \times \left(\frac{\pi D_2^2}{4}\right)\right]$$

Ou encore :

$$V_3 = \frac{Q_{V1} + \left[V_2 \times \left(\frac{\pi D_2^2}{4}\right)\right]}{\left(\frac{\pi D_3^2}{4}\right)} \quad \Rightarrow \quad V_3 = 4{,}13 \text{ m/s}$$

4. Restriction progressive de canalisation [☆☆]

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait incompressible dans une conduite circulaire de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α (figure II.4).

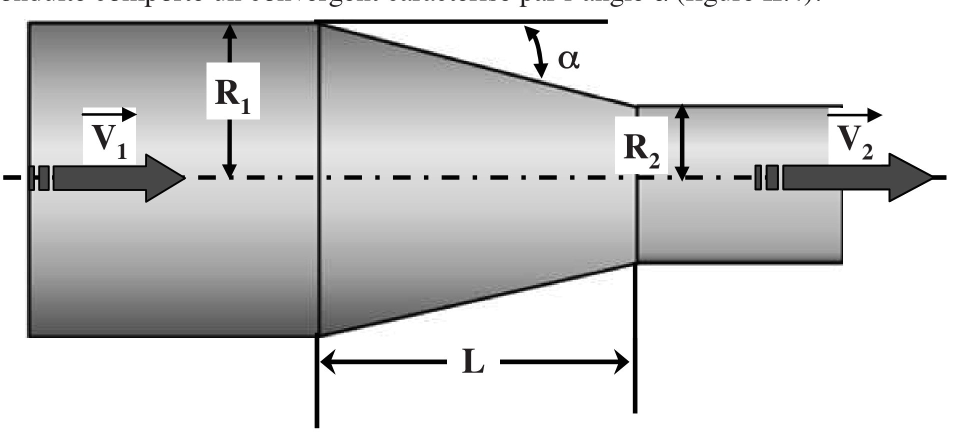

Figure II.4 - Schéma du convergent en canalisation à section circulaire

a. Rapport géométrique de convergence

On demande de déterminer et de calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).

◗ *Réponse*

Immédiat : avec l'hypothèse de régime permanent, de fluide parfait et incompressible, on a la conservation du débit volumique qui donne alors:

$$Q_{V1} = Q_{V2} = cte \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2 \quad \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 2$$

Soit : $\mathbf{R_1 = 2 \times R_2}$!

b. Longueur du convergent

On demande de déterminer puis de calculer (R_1-R_2) en fonction des données du problème. En déduire la longueur L. (On donne : $R_1 = 50$ mm, $\alpha = 15°$)

◗ *Réponse*

Géométriquement, on a :

$$\tan\alpha = \frac{(R_1 - R_2)}{L} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{(R_1 - R_2)}{\tan\alpha} = \frac{R_1}{2 \times \tan\alpha} \quad \Rightarrow L = 93{,}3 \text{ mm}$$

c. Angle de convergence imposé

On demande de déterminer ce que vaudrait L si l'on voulait multiplier par 16 la vitesse avec un angle $\alpha = 60°$.

◗ *Réponse*

Si $V_2 = 16 \times V_1$ alors d'après la question a, $R_1 = 4 \times R_2$ et

$$L = \frac{(R_1 - R_2)}{\tan\alpha'} = \frac{3 \times R_1}{4 \times \tan\alpha'} \quad \Rightarrow L = 21{,}65 \text{ mm}$$

II. Théorème de Bernoulli en canalisations simples

1. Buse d'arrosage [☆]

Une buse d'arrosage (figure II.5) débouchant à la pression atmosphérique ($P_{atm} = 10^5$ Pa) au point 2 est reliée au niveau de son entrée (point1) à une canalisation sous pression P_1.

On souhaite connaître les conditions au point 1 connaissant les diamètres en 1 et 2, la vitesse de sortie en 2 et sachant que l'on travaille en fluide parfait et en régime incompressible permanent.

On donne $\rho = 1000$ kg/m^3 et $g = 10$ m/s^2.

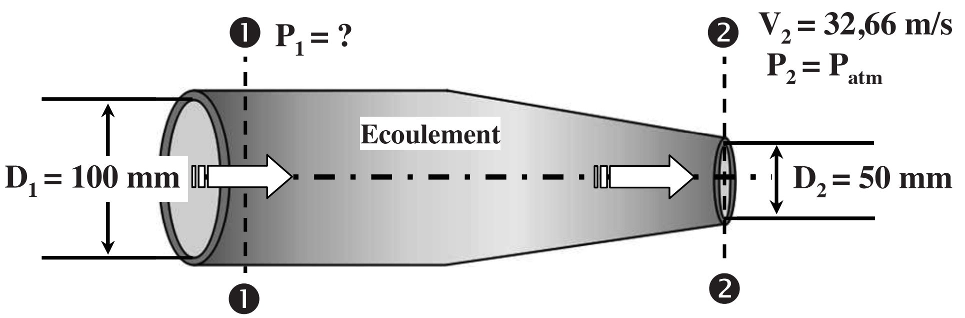

Figure II.5 - Schéma de la buse d'arrosage

a. Débit à travers la buse

Déterminer le débit volumique Q_V et le débit massique Q_m dans la buse.

◗ Réponse

On a :

$$Q_V = S_2 \times V_2 = \left(\frac{\pi D_2^2}{4}\right) \times V_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{A.N.}: Q_V = 0{,}64.10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s} = 64\ \text{L/s}$$

$$Q_m = \rho \times Q_V = \rho \times \left(\frac{\pi D_2^2}{4}\right) \times V_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{A.N.}: Q_m = 64{,}13\ \text{kg/s}$$

b. Vitesse d'entrée

Déterminer la vitesse V_1 à l'entrée de la buse.

◗ Réponse

Immédiat, par exemple :

$$Q_{V1} = Q_{V2} = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2$$

Soit :

$$\Rightarrow V_1 = \frac{S_2}{S_1} \times V_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \times V_2 = 8{,}165\ \text{m/s}$$

ou

$$Q_{V1} = Q_{V2} = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \times V_1 = Q_{V1} \quad \Rightarrow V_1 = \frac{4Q_{V1}}{\pi D_1^2} = 8{,}165\ \text{m/s}$$

ou

$$Q_{V1} = Q_{V2} = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2$$

et :

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \quad \Rightarrow V_1 = \frac{V_2}{4} = 8{,}165\ \text{m/s}$$

c. Pression d'entrée

En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer puis calculer la pression P_1 (en bar) à l'entrée de la buse

◗ Réponse

Bernoulli :

$$P_1 + \rho g Z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 + \rho g Z_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} = \text{cte} \qquad (1)$$

Le point 2 est à l'air libre et de plus on a les hypothèses ou conditions suivantes : $P_2 = P_{atm}$. De plus : $Z_1 = Z_2$ et $V_2 = 4 \times V_1$ d'où (1) devient alors :

$$P_1 + \frac{\rho}{2} \times \frac{V_2^2}{16} = P_{atmo} + \frac{\rho V_2^2}{2} \quad \Leftrightarrow P_1 = P_{atmo} + \frac{\rho V_2^2}{2} - \left(\frac{\rho}{2} \times \frac{V_2^2}{16}\right)$$

Et :

$$P_1 = P_{atmo} + \frac{15 \rho V_2^2}{32} \quad \Rightarrow \quad P_1 = 6\ \text{bar}$$

2. Prise de pression à l'intérieur d'un convergent [☆]

De l'air de masse volumique ($\rho_a = 1{,}23$ kg/m^3) s'écoule à travers une tuyère convergente (figure II.6).

Dans cette tuyère, on a installé sur l'axe (repéré par $Z_1 = Z_2$) une prise de pression statique (appelée tube de Pitot pour lequel au point 1 la vitesse s'annule : $V_1 = 0$ au point d'arrêt).

Après le convergent, on a installé au point 2 en paroi une prise de pression statique. Les 2 prises sont reliées entre elles par un tube manométrique contenant une huile ($\rho_h = 827$ kg/m^3).

Entre l'axe de la tuyère et le point A on a : $Z_1 - Z_A = Z_1 - Z_B = h + H$ (avec H = 100 mm et h inconnue).

On donne : diamètre de la tuyère au point 1 : D = 200 mm, diamètre de la tuyère au point 2 : d = 100 mm et g = 9,81 m/s^2.

Remarque : On considérera l'écoulement d'air dans la tuyère en régime incompressible permanent.