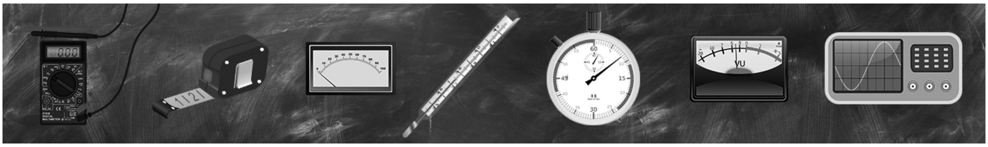
ONDES - OPTIQUE

Complément

Ordres de Grandeur en Ondes/Optique



Les indispensables

Nom	Symbole	Valeur
Indice de réfraction de l'eau	n_{eau}	1.33
Indice de réfraction du verre	n_{verre}	1.52
Punctum proximum	δ_{PP}	25 cm
Vitesse de la lumière	c	$3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Vitesse du son dans l'air (25 °C)	c_{air}	$340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Bleu - Violet	λ_{bleu}	380 nm - 480 nm
Rouge	λ_{rouge}	610 nm - 800 nm
Intensité minimale détectable par l'oreille	I_0	$10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$
Sensibilité oreille humaine	S	0 dB - 120 dB
Spectre audible oreille humaine	Δf	20 Hz - 20 kHz

Les conseillés

Nom	Symbole	Valeur
Résolution microscope optique		0.2 µm
Résolution microscope électronique		0.2 nm
Taille cellule rétine	d_{cell}	2-6 µm
Vert	λ_{vert}	480 nm - 550 nm
Jaune	λ_{jaune}	550 nm - 590 nm
Orange	λ_{orange}	590 nm - 610 nm
Célérité dans un cable coaxial	c_{coax}	$2 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Fréquence radio AM	f_{AM}	100 kHz
Fréquence radio FM	f_{FM}	100 MHz

Nom	Symbole	Valeur
Wifi	f_{wifi}	2.4 GHz et 5 GHz
GPS	f_{GPS}	1 GHz
Grossissement microscope optique	G	100 - 2000
Résolution de l'oeil	$\alpha_{\text{min-}oeil}$	3×10^{-4} rad
Diamètre de l'œil	d_{oeil}	2 cm
Vitesse du son dans l'eau (25 °C)	c_{eau}	1.4×10^{3} m s^{-1}

Les bonus

Nom	Symbole	Valeur
Grossissement microscope électronique	G_{elec}	30000 - 150000
Grossissement télescope	$G_{\text{télé}}$	100 - 200
Résolution télescope		10^{-7} rad
Tension corde de piano	T_{piano}	800 N
Masse linéique corde de piano	μ_{piano}	6 g m^{-1}
Tension caténaire TGV	T_{TGV}	26 kN

Propagation d'une onde mécanique dans une chaîne contenant une impureté

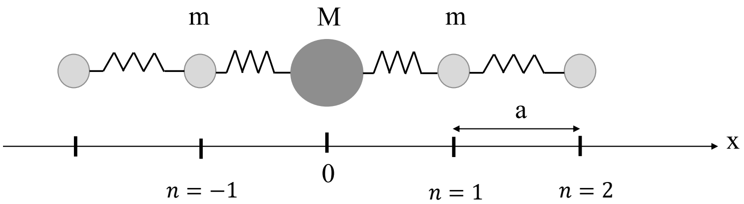
On s'intéresse dans cet exercice à la propagation d'une onde mécanique dans un solide cristallin unidimensionnel. Plus précisément, on considère ici une file d'atomes situés à l'équilibre aux points d'abscisse $x_n = n.a$ $(n \in \mathbb{Z})$ sur un axe Ox.

— Pour $n \neq 0$, les particules sont des atomes identiques de masse m.

— pour $n = 0$, la particule a une masse $M \neq m$. C'est l'impureté.

Ces particules peuvent effectuer des déplacements selon l'axe Ox, et on appelle u_n le déplacement algébrique de la particule n. On suppose qu'il existe entre deux particules adjacentes des forces élastiques proportionnelles à la distance qui les sépare. La force exercée par la particule n sur la particule $n+1$ s'écrit :

$$F_{n\to n+1} = \alpha(u_n - u_{n+1}),\ \alpha > 0$$



1. Écrire les équations du mouvement.

2. Dans la région des x négatifs, on considère une onde de pulsation ω, et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, se propageant dans le sens des x croissants, soit $u_{i_n} = ue^{i(kna-\omega t)}$.

2.1. Quelle est la relation reliant ω et k ?

2.2. Justifier qu'il existe une onde réfléchie et une onde transmise par l'impureté.

2.3. Calculer l'amplitude et le déphasage de chacune de ces ondes en fonction de l'amplitude et de la phase de l'onde incidente.

3. Etudier les cas particulier $M = m$, $M = 0$, et $M \longrightarrow +\infty$.

▶ **Correction :** Propagation d'une onde mécanique dans une chaîne contenant une impureté

1. Afin d'établir les équations du mouvement, il convient de **distinguer l'impureté des autres atomes**. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On isole le système {impureté de masse M} :

Bilan des forces s'exerçant sur l'impureté ($n = 0$)

— Force exercée par la particule en $n = -1$: $F_{-1\to 0} = \alpha(u_{-1} - u_0)$

— Force exercée par la particule en $n = 1$: $F_{1\to 0} = -F_{0\to 1} = -\alpha(u_0 - u_1)$

D'après le **principe fondamental de la dynamique** (PFD) :

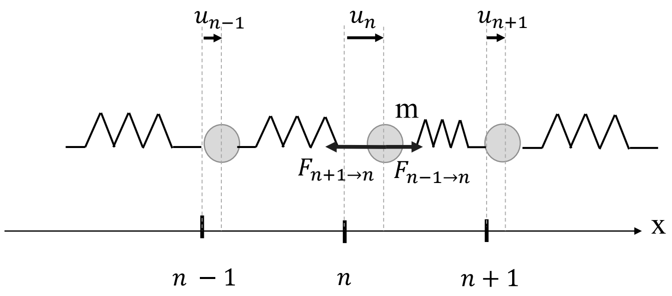
$$M\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \alpha(u_{-1} - u_0) - \alpha(u_0 - u_1) \tag{1}$$

De manière similaire, on isole le système {atome de masse m} :

Bilan des forces s'exerçant sur l'atome ($n \neq 0$)

— Force exercée par la particule en $n-1$: $F_{n-1\to n} = \alpha(u_{n-1} - u_n)$

— Force exercée par la particule en $n+1$:$F_{n+1\to n} = -F_{n\to n+1} = -\alpha(u_n - u_{n+1})$



D'après le **principe fondamental de la dynamique (PFD)**,

$$\forall (n \neq 0) \quad m\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \alpha(u_{n-1} - u_n) - \alpha(u_n - u_{n+1}) \tag{2}$$

Pour mémoire

On retrouve une **équation de d'Alembert** dans le cas d'un milieu discontinu. On peut retrouver l'équation classique en remplaçant n par x, $n-1$ par $x - \mathrm{d}x$ et $n+1$ par $x + \mathrm{d}x$, et en faisant un développement limité.

2. Dans la région des x négatifs, on considère une onde de pulsation ω, et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ qui se propage dans le sens des x croissants, soit $u_{i_n} = ue^{i(kna-\omega t)}$. Il s'agit d'une forme d'onde pour des valeurs de x discrètes $x = na < 0$.

2.1. L'onde doit vérifier l'équation (2), ce qui permet d'obtenir une relation liant ω et k pour $n < 0$:

$$m \underbrace{\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}}_{(i\omega)^2 ue^{i(kna-\omega t)}} = \alpha \left[ue^{i[k(n-1)a-\omega t]} - ue^{i(kna-\omega t)}\right] - \alpha \left[ue^{i(kna-\omega t)} - ue^{i[k(n+1)a-\omega t]}\right]$$

$$\Rightarrow -m\omega^2 e^{ikna} = \alpha\left(e^{ik(n-1)a} - e^{ikna}\right) - \alpha\left(e^{ikna} - e^{ik(n+1)a}\right) \Rightarrow -m\omega^2 = -2\alpha + \alpha e^{ika} + \alpha e^{-ika}$$

$$\Rightarrow \quad m\omega^2 = \alpha\left(1 - e^{ika}\right) + \alpha\left(1 - e^{-ika}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{2\alpha}{m}[1 - \cos(ka)]}$$

2.2. La **discontinuité** en $n = 0$ implique l'apparition d'une **onde réfléchie** et d'une **onde transmise**. En effet, comme $m \neq M$, l'onde seule ne peut pas vérifier à la fois l'équation (2) et l'équation (1).

On suppose donc, qu'en arrivant sur l'impureté de masse M, l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie u_r et à une onde transmise u_t. Par **continuité**, les ondes transmises et réfléchies ont la **même pulsation** ω. On a donc :

— Une onde réfléchie $u_{r,n} = u_r e^{i(-k'na-\omega t+\phi_r)}$, $\forall n \leq 0$

— Une onde transmise $u_{t,n} = u_t e^{i(k''na-\omega t+\phi_t)}$, $\forall n \geq 0$

Avec u_r, u_t les **amplitudes** supposées réelles, et ϕ_r, ϕ_t, le **déphasage** produit par la réflexion et la transmission de l'onde incidente.

2.3. Dans le milieu $n \leq 0$, les ondes incidentes et réfléchies se propagent, tandis que dans le milieu $n \geq 0$, seule l'onde transmise se propage. Les déplacements des atomes sont donc les suivants :

— Déplacement pour $n \leq 0$: $u_n = u_{i,n} + u_{r,n} = e^{-i\omega t}\left(ue^{ikna} + u_r e^{i(-k'na+\phi_r)}\right)$,

— Déplacement pour $n \geq 0$: $u_n = u_{t,n} = u_t e^{i(k''na-\omega t+\phi_t)}$

Pour $n \neq 0$, le déplacement u_n d'un atome mis en mouvement par l'onde transmise ou l'onde réfléchie doit vérifier la même relation (2), car les milieux sont identiques. Cela implique que les modules des vecteurs d'onde $\overrightarrow{k'}$ et $\overrightarrow{k''}$ vérifient la même **relation de dispersion** que le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$. On a donc :

$$\boxed{k = k' = k''}$$

Afin d'établir l'expression des amplitudes et des déphasages, on commence par utiliser la **continuité de l'amplitude du déplacement en** $n = 0$:

$$\boxed{u + u_r e^{i\phi_r} = u_t e^{i\phi_t}} \quad (3)$$

De plus, les déplacements en $n=0$ doivent vérifier l'équation (1). En particulier, en utilisant l'expression pour $n \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
M\frac{\partial^2 u_{t,0}}{\partial t^2} &= \alpha\left[(u_{i,-1}+u_{r,-1})-u_{t,0}\right]-\alpha(u_{t,0}-u_{t,1})\\
\Rightarrow\quad -M\omega^2 u_t e^{i\phi_t} &= -2\alpha u_t e^{i\phi_t}+\alpha u_t e^{i(ka+\phi_t)}+\alpha(ue^{-ika}+u_r e^{i(ka+\phi_r)})
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\quad -\alpha u e^{-ika} = \alpha u_r e^{ika}e^{i\phi_r}+u_t e^{i\phi_t}\left[\alpha(e^{ika}-2)+M\omega^2\right]
$$

Or, d'après la relation (3), on a $u_r e^{i\phi_r} = u_t e^{i\phi_t}-u$. En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient :

$$
-\alpha u e^{-ika} = \alpha e^{ika}(u_t e^{i\phi_t}-u)+u_t e^{i\phi_t}\left[\alpha(e^{ika}-2)+M\omega^2\right]
$$

$$
\Rightarrow\quad -\alpha u(e^{-ika}-e^{ika}) = u_t e^{i\phi_t}\left[\alpha(2e^{ika}-2)+M\omega^2\right]
$$

$$
\Rightarrow\quad \left\{\begin{aligned}
u_t e^{i\phi_t} &= \frac{i\sin(ka)u}{(\frac{M}{m}-1)[1-\cos(ka)]+i\sin(ka)}\\
u_r e^{i\phi_r} &= -\frac{u(\frac{M}{m}-1)[1-\cos(ka)]}{(\frac{M}{m}-1)[1-\cos(ka)]+i\sin(ka)}
\end{aligned}\right.
$$

Astuce

En se rappelant que : $m\omega^2 = 2\alpha\,[1-\cos(ka)]$ et $e^{-ika}-e^{ika} = -2i\sin(ka)$, on obtient finalement le résultat.

A partir des expressions de $u_t e^{i\phi_t}$ et $u_r e^{i\phi_r}$, on déduit les valeurs des amplitudes et des déphasages :

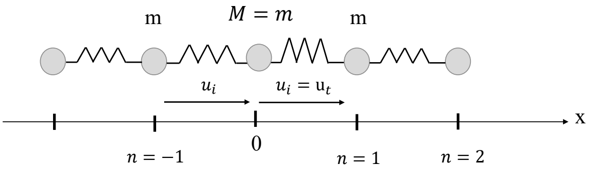
$$
\left\{\begin{aligned}
u_t &= u\frac{|\sin(ka)|}{\sqrt{\left[|\frac{M}{m}-1|(1-\cos(ka))\right]^2+\sin^2(ka)}}\\
u_r &= u\frac{|\frac{M}{m}-1|(1-\cos(ka))}{\sqrt{\left[|\frac{M}{m}-1|(1-\cos(ka))\right]^2+\sin^2(ka)}}
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
\tan(\phi_t) &= \frac{Im(u_t e^{i\phi_t})}{Re(u_t e^{i\phi_t})} \Rightarrow \phi_t = \frac{\pi}{2}-\arctan\left[\frac{(\frac{M}{m}-1)[1-\cos(ka)]}{\sin(ka)}\right]\\
\tan(\phi_r) &= \frac{Im(u_r e^{i\phi_r})}{Re(u_r e^{i\phi_r})} \Rightarrow \phi_r = \pi-\arctan\left[\frac{\sin(ka)}{(\frac{M}{m}-1)[1-\cos(ka)]}\right]
\end{aligned}\right.
$$

⊕ Petit plus

Cet exercice est très **calculatoire** et assez technique. Si vous n'avez pas le temps de finir les calculs pendant l'épreuve, il est possible qu'en fin d'oral l'examinateur vous donne ces expressions et vous demande de faire l'analyse de la question 3. Cela permet de tester à la fois vos compétences **mathématiques** et votre **sens physique**.

3. On étudie maintenant les cas particuliers :



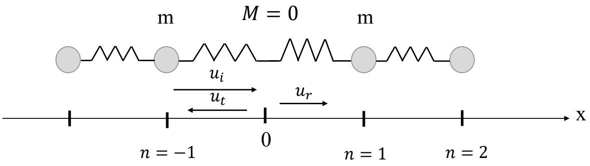
— **M = m** : ce cas correspond à une chaîne d'atomes **sans impureté**. Tous les atomes sont identiques, il n'y a donc **pas d'onde réfléchie**. On vérifie donc que l'onde transmise est égale à l'onde incidente, et l'onde réfléchie est d'amplitude nulle :

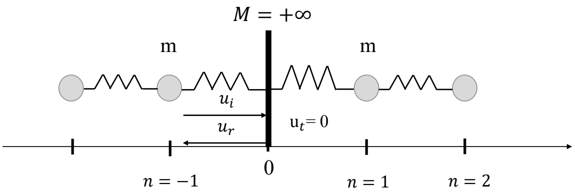
$$\boxed{\begin{cases} |u_t| = u_t\cos(\phi_t) = Re(u_t e^{i\phi_t}) = u\dfrac{\sin(ka)}{\sqrt{\sin^2(ka)}} \times \dfrac{\sin(ka)}{\sqrt{\sin^2(ka)}} = u \\ |u_r| = 0 \end{cases}}$$

— **M = 0** : Il n'y a pas de particule en $n = 0$. On a alors :

$$\begin{cases} u_t e^{i\phi_t} = \dfrac{i\sin(ka)u}{-[1-\cos(ka)]+i\sin(ka)} \\ u_r e^{i\phi_r} = -\dfrac{u[1-\cos(ka)]}{-(1-\cos(ka))+i\sin(ka)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} u_r = u\sin(\frac{ka}{2}) & \phi_r = -\frac{\pi}{2} - \frac{ka}{2} \\ u_t = u\cos(\frac{ka}{2}) & \phi_t = -\frac{ka}{2} \end{cases}}$$





— **M ⟶ ∞** : L'impureté est fixe, on a **réflexion totale**. On vérifie donc que l'onde transmise est nulle, et l'onde réfléchie de même amplitude que l'onde incidente, avec un déphasage de π. On a alors :

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} u_t e^{i\phi_t} \longrightarrow 0 \\ u_r e^{i\phi_r} \longrightarrow -u \end{cases}}$$