Cours

1 Continuité d'une fonction

Définition de la continuité en a

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

La fonction f **est continue en** a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Commentaire

Intuitivement, une fonction f est continue lorsqu'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon de la feuille autrement dit la courbe représentative d'une fonction continue ne contient pas de « trou ».

Définition de la continuité sur un intervalle

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

La fonction f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout réel a de I.

Théorème (continuité des fonctions usuelles)

Les fonctions polynômes, rationnelles, $x \longrightarrow \sqrt{x}$ et $x \longrightarrow |x|$ ainsi que toutes les fonctions obtenues par somme, produit, quotient et composée de ces fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Théorème

Si une fonction est dérivable sur un intervalle alors elle est continue sur cet intervalle.

Commentaire

La réciproque est fausse. La fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ sans être dérivable en 0.

2 Image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et (u_n) une suite de réels appartenant à I.

Si f est continue en $\ell \in I$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors la suite $\left(f(u_n)\right)$ converge vers $f(\ell)$.

Voici une autre formulation possible du théorème précédent.

Théorème

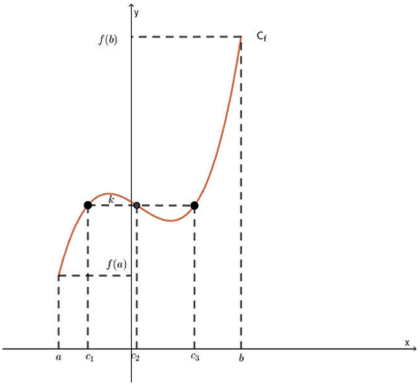
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et (u_n) une suite de réels appartenant à I.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

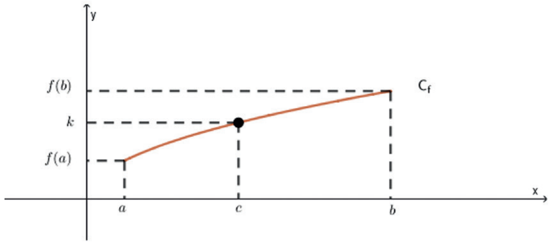
Si f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Pour la valeur de k, de la figure ci-dessus, il existe trois valeurs de c telles que $f(c) = k$.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a,b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** dans l'intervalle $[a,b]$.



Pour la valeur de k, de la figure ci-dessus, il existe une unique valeur de c telles que $f(c)=k$.

Vocabulaire à connaître

Une fonction f est **strictement monotone** sur un intervalle $[a,b]$ lorsqu'elle est soit toujours strictement croissante sur $[a,b]$, soit toujours strictement décroissante sur $[a,b]$. Si ce n'est pas le cas, il faudra « découper » l'intervalle $[a,b]$ en sous intervalles sur lesquels f sera strictement monotone.

Un **corollaire** est un théorème qui est une conséquence d'un autre théorème.

Commentaire

- On peut étendre le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire à un intervalle quelconque ($[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$ où a et b sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$). On remplace alors $f(a)$ ou $f(b)$ par les limites de f en a ou b.
- Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle donné sans qu'on sache forcément résoudre cette équation. On pourra chercher une valeur approchée de cette solution par la méthode de **dichotomie** (voir exercice 8.3), par **balayage** (voir exercice 8.7) ou par résolution de l'équation à l'aide des fonctionnalités de la calculatrice.

Exercices

Compétence attendue

- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x)=k$: existence, unicité, encadrement.

Exercice 8.1

Représenter, raisonner

On considère la fonction f définie sur $[-8,+\infty[$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-8		-5		2		$+\infty$
Variations de f	10	$\searrow$	-2	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

1. Combien de solutions admet l'équation $f(x)=3$? Justifier rigoureusement votre réponse.
2. Donner l'allure d'une courbe représentative de la fonction f qui représente cette « situation ».

Exercice 8.2

Calculer, raisonner

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ par $f(x)=x^3+x+1$.

1. Tracer la courbe représentative de f et conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[-2,2]$.
2. Justifier que la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-2,2]$.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2,2]$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 8.3

Calculer, raisonner

Soit la fonction g définie par $g(x)=x^4-2x^3-\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que l'équation $g(x)=1$ admet deux solutions $\alpha\in[-1{,}0]$ et $\beta\in[2{,}3]$. Justifier que l'équation $g(x)=1$ n'a pas de solution sur $[0;2]$.
2. On donne l'algorithme **dichotomie1** ci-après :

$a \leftarrow -1$
$b \leftarrow 0$
Tant que $b-a>0{,}1$
    $m \leftarrow (a+b)/2$
    Si $g(m)>1$ alors
        $a \leftarrow m$
    Sinon
        $b \leftarrow m$
    Fin Si
Fin Tant que

a. Compléter le tableau ci-dessous en faisant « tourner » cet algorithme.

	a	b	$b-a$	m
Étape 1				
Étape 2				
Étape 3				
Étape 4				
Étape 5				

b. Quelles sont les valeurs des variables a et b à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

c. Implémenter en langage Python cet algorithme sous forme d'une fonction *dichotomie1()*, et retrouver les résultats de la question précédente.

d. Modifier l'algorithme **dichotomie1** pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 0,001, puis l'implémenter en langage Python sous forme d'une fonction *dichotomie2()*. L'exécuter et donner un encadrement de β d'amplitude 0,001.

Compétence attendue

- Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 8.4

Calculer, raisonner

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

1. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$ est strictement croissante sur $[0;1]$, et que pour tout $x \in [0;1]$, on a : $f(x) \in [0;1]$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 1.
3. En déduire sa convergence. Calculer alors sa limite ℓ.

Exercice 8.5

Calculer, raisonner

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontrer par un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
2. En déduire la convergence de la suite (u_n) vers un réel ℓ.
3. Justifier que ℓ est la solution positive de l'équation $x = \sqrt{x+6}$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 8.6

Chercher, calculer, raisonner

La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 2$ converge-t-elle ?

Exercices

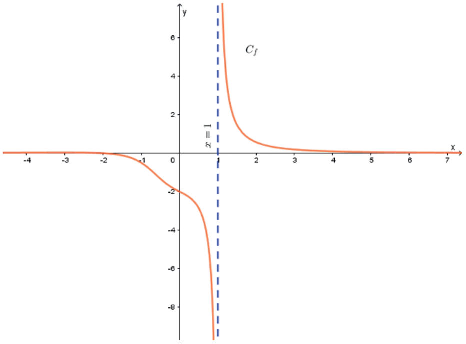
Exercices-bilan

Exercice-bilan 8.1

40 min • 3 points

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3-1}$.

1. Voici la courbe C_f représentative de la fonction f. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur ses variations ?



2. Étudier les variations de la fonction polynômiale P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^3 - 6x^2 - 1$. On calculera les limites de $P(x)$ en l'infini.
3. Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. On précisera un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$ par la méthode de balayage.
4. En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^3-1)^2}$.
6. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice-bilan 8.2

45 min • 3 points

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{550}x^2 + 1{,}1x$.
   a. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0;55]$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 12$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Calculer u_1.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n).

e. Calculer alors la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).