Calculer des dérivées avec la fonction exponentielle

19

Quand on ne sait pas !

Tout d'abord apprendre les formules de dérivation avec les fonctions exponentielles.

$$(e^x)' = e^x. \qquad (e^u)' = u'e^u.$$

EXEMPLE 1 $f(x) = 3e^x + 5x - 7$.

La fonction dérivée est telle que : $f'(x) = 3e^x + 5$.

EXEMPLE 2 $f(x) = e^{0,5x-5}$, on pose $u(x) = 0,5x - 5$, ainsi $u'(x) = 0,5$.

La fonction dérivée a pour expression : $f'(x) = 0,5e^{0,5x-5}$

Que faire ?

- Ne pas oublier que l'on peut également associer les formules de dérivation de produits ou quotients.

$$(u \times v)' = u'v + v'u. \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

- Toujours avoir en tête que le but d'un calcul de dérivée est de faire une étude de son signe. Il faut donc essayer de présenter le résultat sous une forme où l'étude du signe est possible.

▷ *Voir fiche n° 21.*

Conseils

Seule la fonction exponentielle $(x \mapsto e^x)$ est égale à sa dérivée, il n'en est pas de même pour les fonctions composées comme e^{-x} ou e^{3x}.

Exemple traité

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (4x^3 - 5)e^{-2x}$.

SOLUTION

On utilise la dérivée d'un produit en posant $u(x) = 4x^3 - 5$ et $v(x) = e^{-2x}$.
En dérivant, on a alors : $u'(x) = 12x^2$ et $v'(x) = -2e^{-2x}$.
Ainsi : $f'(x) = 12x^2e^{-2x} + (-2e^{-2x})(4x^3 - 5)$.
On a donc $f'(x) = (12x^2 - 2(4x^3 - 5))e^{-2x}$, soit :

$$f'(x) = (-8x^3 + 12x^2 + 10)e^{-2x}$$

Exercices

Exercice 19.1 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a $f(x) = 7e^x + 5x^2 + 4x + 12$.

b $f(x) = 3x - 9 + 2e^x$.

Exercice 19.2 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a $f(x) = 9e^{3x} + 5e^{2x} + 4$.

b $f(x) = 3e^{-x} + e^{3x+1}$.

c $f(x) = e^{2x^2+1}$.

Exercice 19.3 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a $f(x) = (4x - 6)e^{-x}$.

b $f(x) = (5x - 3)e^{2x+1}$.

Exercice 19.4 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a $f(x) = \dfrac{3e^x + 4}{2e^x + 1}$.

b $f(x) = \dfrac{e^{3x} + 1}{x + 1}$.

c $f(x) = \dfrac{e^{-x} - 8}{2e^x + 5}$.

Pour vous aider à démarrer

Exercice 19.1	Il s'agit d'appliquer les formules « de base ».
Exercice 19.2	Il faut appliquer la formule de composition $\left(e^{u}\right)' = u'e^{u}$.
Exercice 19.3	Il faut appliquer la formule de dérivation du produit.
Exercice 19.4	Il faut appliquer la formule de dérivation du quotient.

Solutions des exercices

Exercice 19.1

a $f(x) = 7e^{x} + 5x^{2} + 4x + 12$, donc par dérivation : $f'(x) = 7e^{x} + 10x + 4$.

b $f(x) = 3x - 9 + 2e^{x}$, donc par dérivation : $f'(x) = 3 + 2e^{x}$.

Exercice 19.2

a $f(x) = 9e^{3x} + 5e^{2x} + 4$, donc par dérivation : $f'(x) = 27e^{3x} + 10e^{2x}$.

b $f(x) = 3e^{-x} + e^{3x+1}$, donc par dérivation : $f'(x) = -3e^{-x} + 3e^{3x+1}$.

c $f(x) = e^{2x^{2}+1}$. On pose $u(x) = 2x^{2} + 1$ et, en dérivant, on a : $u'(x) = 4x$.
La fonction dérivée a pour expression : $f'(x) = 4x\, e^{2x^{2}+1}$.

Exercice 19.3

a $f(x) = (4x-6)e^{-x}$. On pose $u(x) = 4x - 6$ et $v(x) = e^{-x}$.
En dérivant, on obtient : $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -e^{-x}$.
La fonction dérivée a pour expression : $f'(x) = 4e^{-x} + (4x-6)\left(-e^{-x}\right)$.
On a donc $f'(x) = \left(4 - (4x-6)\right)e^{-x}$, soit $f'(x) = (-4x+10)e^{-x}$.

b $f(x) = (5x-3)e^{2x+1}$. On pose $u(x) = 5x - 3$ et $v(x) = e^{2x+1}$.
En dérivant, on obtient : $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 2e^{2x+1}$.
La fonction dérivée est ainsi : $f'(x) = 5e^{2x+1} + (5x-3)\left(2e^{2x+1}\right)$.
On a donc $f'(x) = (5 + 10x - 6)e^{2x+1}$, soit $f'(x) = (10x-1)e^{2x+1}$.

Solutions

Exercice 19.4

a $f(x)=\dfrac{3e^x+4}{2e^x+1}$. On pose $u(x)=3e^x+4$ et $v(x)=2e^x+1$.

En dérivant, on obtient : $u'(x)=3e^x$ et $v'(x)=2e^x$.

La fonction dérivée est telle que : $f'(x)=\dfrac{3e^x\left(2e^x+1\right)-2e^x\left(3e^x+4\right)}{\left(2e^x+1\right)^2}$.

On a donc $f'(x)=\dfrac{e^x\left(6e^x+3-6e^x-8\right)}{\left(2e^x+1\right)^2}$, soit : $f'(x)=\dfrac{-5e^x}{\left(2e^x+1\right)^2}$.

b $f(x)=\dfrac{e^{3x}+1}{x+1}$. On pose $u(x)=e^{3x}+1$ et $v(x)=x+1$.

En dérivant, on obtient $u'(x)=3e^{3x}$ et $v'(x)=1$.

La fonction dérivée est telle que : $f'(x)=\dfrac{3e^{3x}(x+1)-\left(e^{3x}+1\right)}{(x+1)^2}$.

On a donc $f'(x)=\dfrac{3xe^{3x}+3e^{3x}-e^{3x}-1}{(x+1)^2}$, soit : $f'(x)=\dfrac{3xe^{3x}+2e^{3x}-1}{(x+1)^2}$.

c $f(x)=\dfrac{e^{-x}-8}{2e^x+5}$. On pose $u(x)=e^{-x}-8$ et $v(x)=2e^x+5$.

En dérivant, on obtient $u'(x)=-e^{-x}$ et $v'(x)=2e^x$.

La fonction dérivée est telle que : $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}\left(2e^x+5\right)-2e^x\left(e^{-x}-8\right)}{\left(2e^x+5\right)^2}$.

On a donc $f'(x)=\dfrac{-2-5e^{-x}-2+16e^x}{\left(2e^x+5\right)^2}$, soit : $f'(x)=\dfrac{16e^x-5e^{-x}-4}{\left(2e^x+5\right)^2}$.

Déterminer des limites avec la fonction exponentielle

20

Quand on ne sait pas !

Tout d'abord apprendre les limites de base de la fonction exponentielle.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0. \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

Que faire ?

- Pour les fonctions du type $e^{u(x)}$, il est nécessaire de maîtriser les règles de composition des limites :
  Si $u(x)$ tend vers $-\infty$ alors $e^{u(x)}$ tend vers 0.
  Si $u(x)$ tend vers $+\infty$ alors $e^{u(x)}$ tend vers $+\infty$.
- Les théorèmes généraux sur les limites restent évidemment valables avec la fonction exponentielle.

Conseils

Pour bien mémoriser la composition des limites avec les exponentielles retenir les résultats suivants (sans jamais les écrire sous cette forme dans une copie) :

« $e^{-\infty} = 0$ » et « $e^{+\infty} = +\infty$ »

Exemple traité

Déterminer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x-6}$. **b** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x + x^2 - 4\right)$.

c $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+1}$. **d** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x + x^3\right)$. **e** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x}{x-2}$.

SOLUTION

a $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x-6) = -\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x-6} = 0$.

b $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 - 4\right) = +\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x + x^2 - 4\right) = +\infty$.

c $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + 1\right) = +\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+1} = +\infty$.

d $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x + x^3\right) = +\infty$.

e Étude du signe du dénominateur :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Le signe n'étant pas le même à gauche et à droite de 2, il est nécessaire de différencier l'étude.

Étude à gauche de 2 : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} e^x = e^2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} (x-2) = 0^-\end{array}\right\} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{e^x}{x-2} = -\infty$.

Étude à droite de 2 : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} e^x = e^2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} (x-2) = 0^+\end{array}\right\} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{e^x}{x-2} = +\infty$.

Exercices

Exercice 20.1 Déterminer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+5}$. **b** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}$.

c $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x + x - 7\right)$ **d** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{-4x} - 2x + 5\right)$. **e** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{2x} + 3e^x - 8\right)$.

Exercice 20.2 Déterminer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x+3}$.

b $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x}$.

c $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x+3x-9\right)$.

d $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-2x}+\dfrac{3}{x}\right)$.

e $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((7x-4)e^x\right)$.

f $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x\left(3e^{2x}-8\right)\right)$.

Exercice 20.3 Déterminer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2e^x}{e^x-1}$.

b $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-3e^x}{x-1}$.

c $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{3x}+7}{x^2}$.

Exercice 20.4 On admet les limites suivantes (appelées « croissances comparées »), valables pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Déterminer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2e^x+xe^x-5\right)$.

b $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x-x\right)$.

Pour vous aider à démarrer

Exercice 20.1 / **Exercice 20.2**	Utiliser les limites de base avec la composition, la somme et le produit.
Exercice 20.3	Commencer par étudier le signe du dénominateur.
Exercice 20.4	**b** Mettre x en facteur.

Exercice 20.1

a $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+5) = -\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+5} = 0$.

b $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$.

c $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-7) = -\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{x} + x - 7\right) = -\infty$.

d $\lim\limits_{x \to -\infty} -4x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-4x} = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x+5) = +\infty$ alors par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-4x} - 2x + 5\right) = +\infty$.

e $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^{x} = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{2x} + 3e^{x} - 8\right) = -8$.

Exercice 20.2

a $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x+3) = +\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{4x+3} = +\infty$.

b $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x = -\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0$.

c $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x-9) = +\infty$.
On a donc, par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x} + 3x - 9\right) = +\infty$.

d $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$, alors par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-2x} + \dfrac{3}{x}\right) = 0$.

e $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x-4) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$.
On a donc, par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((7x-4)e^{x}\right) = +\infty$.

f $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3e^{2x} - 8\right) = +\infty$.
On a donc, par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x}\left(3e^{2x} - 8\right)\right) = +\infty$