Effectuer des calculs algébriques avec les nombres complexes

Quand on ne sait pas !

- Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme unique $x+iy$, où x et y sont deux réels. Cette forme est la forme algébrique du nombre complexe z, le réel x est la partie réelle de z, notée $Re(z)$, et le réel y est la partie imaginaire de z, notée $Im(z)$.

EXEMPLE 1. Si $z=2i-1$ alors $Re\left(z\right)=-1$ et $Im\left(z\right)=2$ car $z=-1+2i$.

- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Un nombre complexe z est un réel si et seulement si $Im\left(z\right)=0$.
  Un nombre complexe z est un imaginaire pur si et seulement si $Re\left(z\right)=0$.

EXEMPLE 2. Le nombre complexe $2i$ est un imaginaire pur et le nombre complexe $z=2i-1$ n'est, ni un réel, ni un imaginaire pur.

- Le conjugué du nombre complexe $z=x+iy$, avec x et y réels, est le nombre $\overline{z}=x-iy$. On a donc $Re\left(\overline{z}\right)=Re\left(z\right)$ et $Im\left(\overline{z}\right)=-Im\left(z\right)$.

EXEMPLE 3. Le conjugué de $z=-1+2i$ est $\overline{z}=-1-2i$.

- L'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{C}$ fonctionnent comme dans $\mathbb{R}$, en utilisant le fait que $i^2=-1$.

EXEMPLE 4. Si $z=-1+2i$ et $z'=4-2i$, alors :

$z+z'=3$.

$z-z'=-1+2i-\left(4-2i\right)=-1+2i-4+2i=-5+4i$.

$zz'=\left(-1+2i\right)\left(4-2i\right)=-4+2i+8i-4i^2$.

Comme $i^2=-1$, on trouve : $zz'=-4+2i+8i+4=10i$.

Bien connaître et savoir correctement appliquer l'égalité ci-dessous.

$$\boxed{z\overline{z}=\left(x+iy\right)\left(x-iy\right)=x^2+y^2}$$

Explication : d'après la 3e identité remarquable, on a :

$$(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$$

EXEMPLE 5. En posant $x=-2$ et $y=1$, on obtient :

$$(-2+i)(-2-i)=(-2)^2+1^2=5$$

- Connaître et savoir appliquer la formule du binôme de Newton.

Pour tous nombres complexes a et b, on a :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

EXEMPLE 6. En posant $a=1$, $b=2i$ et $n=4$, on a :

$$(1+2i)^4=1^4+\binom{4}{1}1^3(2i)^1+\binom{4}{2}1^2(2i)^2+\binom{4}{3}1(2i)^3+(2i)^4$$

$$(1+2i)^4=1+4(2i)+6(2i)^2+4(2i)^3+(2i)^4$$

$$(1+2i)^4=1+8i-24-32i+16=-7-24i.$$

Que faire ?

- Pour écrire un quotient sous forme algébrique, multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

EXEMPLE 7.

$$\frac{4-2i}{-1+2i}=\frac{(4-2i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{-4-8i+2i+4i^2}{(-1)^2+2^2}=\frac{-4-8i+2i-4}{1+4}=\frac{-8-6i}{5}.$$

On trouve donc : $\dfrac{4-2i}{-1+2i}=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}i$.

- Pour déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe, donner sa forme algébrique. Si ce dernier dépend d'un nombre complexe z, remplacer z par $x+iy$ en précisant que x et y sont des réels (cf. exemple traité).

Conseils

- Le conjugué de $i-2$ n'est pas $i+2$ mais $-2-i$.
  Par conséquent, le calcul de $(i-2)(i+2)$, n'est pas du type $z\overline{z}$, mais s'obtient, malgré tout, avec l'identité remarquable $(a-b)(a+b)$, ce qui donne alors $i^2-2^2=-1-4=-5$.
- La partie réelle de $z=2+i(3-4i)$ n'est pas 2. En effet, après avoir développé puis simplifié, on obtient : $z=6+3i$ donc $Re(z)=6$. Voilà pourquoi il faut penser à bien préciser que x et y sont des réels lorsqu'on pose $z=x+iy$.
- Les parties réelle et imaginaire sont des nombres réels ! La partie imaginaire de $2+3i$ est 3 et non $3i$. En particulier, ne pas confondre la partie imaginaire d'un nombre complexe avec un imaginaire pur.
- Si le temps le permet, penser à vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice qui donne la forme algébrique du nombre complexe saisi.

Exemple traité

Pour tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe

$$f(z)=z^2+2z-1$$

1 Déterminer les parties réelle et imaginaire de chacun des nombres suivants :

a $f(i)$ **b** $f\left(\sqrt{2}+i\right)$ **c** $f\left(\dfrac{1}{2-i}\right)$

2 Déterminer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction de celles de z.

3 Existe-t-il des nombres complexes z non réels tels que $f(z)$ soit un réel ?

Solution

1 **a** $f(i)=i^2+2i-1=-1+2i-1=-2+2i$.

La partie réelle de $f(i)$ est -2 et sa partie imaginaire est 2.

b $f\left(\sqrt{2}+i\right)=\left(\sqrt{2}+i\right)^2+2\left(\sqrt{2}+i\right)-1$ donc en développant, on a :

$$f\left(\sqrt{2}+i\right)=2+2i\sqrt{2}+i^2+2\sqrt{2}+2i-1$$

$$f\left(\sqrt{2}+i\right)=2+2i\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}+2i-1=2\sqrt{2}+i\left(2+2\sqrt{2}\right)$$

La partie réelle de $f\left(\sqrt{2}+i\right)$ est $2\sqrt{2}$ et sa partie imaginaire est $2+2\sqrt{2}$.

c $f\left(\dfrac{1}{2-i}\right)=\dfrac{1}{(2-i)^2}+\dfrac{2}{2-i}-1=\dfrac{1}{4-4i+i^2}+\dfrac{2}{2-i}-1=\dfrac{1}{3-4i}+\dfrac{2}{2-i}-1.$

Or on a $\dfrac{1}{3-4i}=\dfrac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)}=\dfrac{3+4i}{3^2+4^2}=\dfrac{3+4i}{25}=\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i.$

On a aussi $\dfrac{2}{2-i}=\dfrac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{4+2i}{2^2+1^2}=\dfrac{4+2i}{5}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{5}i$, d'où :

$$f\left(\frac{1}{2-i}\right)=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i-1=-\frac{2}{25}+\frac{14}{25}i.$$

La partie réelle de $f\left(\dfrac{1}{2-i}\right)$ est $-\dfrac{2}{25}$ et sa partie imaginaire est $\dfrac{14}{25}$.

2 On pose $z=x+iy$ avec x et y réels, ce qui donne :

$$f(z)=(x+iy)^2+2(x+iy)-1=x^2+2ixy+i^2y^2+2x+2iy-1$$

$$f(z)=x^2-y^2+2x-1+i(2xy+2y).$$

La partie réelle de $f(z)$ est x^2-y^2+2x-1 et sa partie imaginaire est $2xy+2y$.

3 D'après **2**, il suffit de trouver un couple de réels $(x\,;\,y)$ avec $y\neq 0$ tels que :

$$2xy+2y=0 \Leftrightarrow 2y(x+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ou } x=-1$$

Ainsi, tous les nombres complexes z non réels tels que $f(z)\in\mathbb{R}$ sont les nombres complexes dont la partie réelle x est égale à -1 et la partie imaginaire n'est pas nulle. Par exemple, si $z=-1+2i$ alors $f(z)$ est un réel. En effet, on obtient $f(-1+2i)=-6\in\mathbb{R}$.

Exercices

Exercice 1.1 Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants (pour les deux premiers, le faire par deux méthodes différentes) :

a $z_1 = (3-2i)^3$ **b** $z_2 = (1+i)^6$ **c** $z_3 = \dfrac{(1+i)^2}{i-2}$

Exercice 1.2 Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

a $z_1 = 1 + \dfrac{1}{i}$ **b** $z_2 = \dfrac{4+2i}{1+i}$ **c** $z_3 = \dfrac{1}{2-i(4-2i)}$

Exercice 1.3 Soit z un nombre complexe. On pose $z = x + iy$, où x et y sont réels. Déterminer les parties réelle et imaginaire de $Z = (z-i)(\overline{z}+2)$ en fonction de x et y.

Exercice 1.4 Soit z un nombre complexe différent de $-i$. On pose $z = x + iy$, où x et y sont réels. Déterminer les parties réelle et imaginaire de $Z = \dfrac{z-i}{z+i}$ en fonction de x et y.

Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1	**a** et **b** 1re méthode : déterminer d'abord la forme algébrique de $(3-2i)^2$ et de $(1+i)^2$. 2e méthode : utiliser la formule du binôme de Newton. **c** Déterminer la forme algébrique de $(1+i)^2$ puis multiplier numérateur et dénominateur par $-2-i$.
Exercice 1.2	Déterminer d'abord la forme algébrique de z_1, z_2 et z_3.
Exercice 1.3	Remplacer z par $x+iy$ et $\overline{z}$ par $x-iy$ puis développer (cf. question **3** de l'exemple traité).
Exercice 1.4	Remplacer z par $x+iy$ puis multiplier numérateur et dénominateur par $x-i(y+1)$.

Exercice 1.1

a 1^re^ méthode

On a $(3-2i)^2 = 9-12i-4 = 5-12i$ donc :

$z_1 = (3-2i)^3 = (3-2i)(5-12i) = 15-36i-10i-24 = -9-46i$.

2^e^ méthode

$$(3-2i)^3 = 3^3 + \binom{3}{1}3^2(-2i)^1 + \binom{3}{2}3(-2i)^2 + (-2i)^3$$
$$(3-2i)^3 = 27+3(9)(-2i)+3(3)(4i^2)+(-8i^3)$$
$$(3-2i)^3 = 27-54i-36+8i = -9-46i.$$

b 1^re^ méthode

On a $(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$ donc :

$z_2 = (1+i)^6 = \left((1+i)^2\right)^3 = (2i)^3 = -8i$.

2^e^ méthode

Les coefficients binomiaux $\binom{6}{k}$, pour k allant de 0 à 6, sont respectivement : 1 ; 6 ; 15 ; 20 ; 15 ; 6 et 1, que l'on peut obtenir par exemple à l'aide du triangle de Pascal. On a alors :

$z_2 = (1+i)^6 = 1^6 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6$.

$z_2 = 1+6i-15-20i+15+6i-1 = -8i$.

c $z_3 = \dfrac{(1+i)^2}{i-2} = \dfrac{1+2i-1}{-2+i} = \dfrac{2i}{-2+i} = \dfrac{2i(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}$

$= \dfrac{-4i+2}{(-2)^2+1^2} = \dfrac{2-4i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i$.

Exercice 1.2

a $z_1 = 1+\dfrac{1}{i} = 1+\dfrac{1\times(-i)}{i\times(-i)} = 1+\dfrac{-i}{1} = 1-i$.

On a donc : $\overline{z_1} = 1+i$.

b $z_2 = \dfrac{4+2i}{1+i} = \dfrac{(4+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{4-4i+2i+2}{1^2+1^2} = \dfrac{6-2i}{2} = 3-i$

On a donc : $\overline{z}_2 = 3+i$.

c $z_3 = \dfrac{1}{2-i(4-2i)} = \dfrac{1}{2-4i-2} = \dfrac{1}{-4i} = \dfrac{1\times i}{-4i\times i} = \dfrac{i}{4} = \dfrac{1}{4}i$.

On a donc : $\overline{z}_3 = -\dfrac{1}{4}i$.

Exercice 1.3 Comme $z = x+iy$, avec x et y réels, on a : $\overline{z} = x-iy$ d'où

$$Z = (x+iy-i)(x-iy+2)$$
$$Z = x^2 - ixy + 2x + ixy + y^2 + 2iy - ix - y - 2i$$
$$Z = (x^2+2x+y^2-y) + i(2y-x-2)$$

On en déduit : $Re(Z) = x^2+2x+y^2-y$ et $Im(Z) = 2y-x-2$.

Exercice 1.4 Comme $z = x+iy$, avec x et y réels, $z+i = x+i(y+1)$ et en multipliant numérateur et dénominateur par son conjugué : $x-i(y+1)$, on a :

$$Z = \frac{z-i}{z+i} = \frac{x+iy-i}{x+iy+i} = \frac{(x+i(y-1))(x-i(y+1))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))}$$

$$Z = \frac{x^2 - ix(y+1) + ix(y-1) + (y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$Z = \frac{x^2 - ixy - ix + ixy - ix + y^2 - 1}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2}$$

$$Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

On en déduit :

$$Re(Z) = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} \quad \text{et} \quad Im(Z) = \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}.$$

Solutions

2 Résoudre une équation du 1er degré

Quand on ne sait pas !

Être au point sur le calcul algébrique (cf. fiche **1**).

Que faire ?

- Pour résoudre une équation de la forme $az = b$, où a et b sont des complexes avec $a \neq 0$, il suffit bien sûr de diviser par a et d'écrire le quotient $\dfrac{b}{a}$ sous forme algébrique. Pour cela, multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué de a.

EXEMPLE 1. L'équation $(-1+3i)z = 1+i$ a dans $\mathbb{C}$, une unique solution $z = \dfrac{1+i}{-1+3i}$. Il reste à écrire la solution sous forme algébrique :

$$z = \frac{(1+i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-1-3i-i+3}{(-1)^2+3^2} = \frac{2-4i}{10} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Conclusion : l'ensemble des solutions est $S = \left\{\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i\right\}$.

- Plus généralement, pour résoudre une équation du 1er degré en z, isoler z afin de se ramener à une équation de la forme $az = b$.

EXEMPLE 2. Si l'équation est $2z + 1 = iz$, il est possible d'isoler z. En effet, l'équation est équivalente à $2z - iz = -1$ c'est-à-dire $(2-i)z = -1$ ce qui donne $z = \dfrac{-1}{2-i}$. Il reste à écrire la solution sous la forme algébrique :

$$z = \frac{-1(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2-i}{2^2+1^2} = \frac{-2-i}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Conclusion : l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i\right\}$.

EXEMPLE 3. Si l'équation est $\dfrac{3z-1}{z} = 3 - i$, il est possible d'isoler z. Cette équation n'est définie que si $z \neq 0$. En multipliant les deux membres par