Chapitre 1

Suites

1 Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques

1.1. Suites arithmétiques

1.1.1. Définition

On dit qu'une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison *r*** (avec r réel fixé) si, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$ (« on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre »).

Méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique : Il suffit de montrer que pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est égale à un réel constant qui sera la raison de la suite.

Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique : On utilise 3 termes consécutifs qui fournissent un contre-exemple. Exemple : si pour tout entier naturel n : $u_n = n^2$, alors : $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 3$; u n'est donc pas arithmétique (si elle l'avait été, ces 2 différences auraient été égales).

Attention

Trois termes ne suffiraient pas pour prouver qu'une suite EST arithmétique.

1.1.2. Sens de variation d'une suite arithmétique

Si $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

- si $r > 0$, la suite est strictement croissante ;
- si $r < 0$, elle est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, elle est constante.

Cela découle immédiatement de : $u_{n+1} - u_n = r$.

1.1.3. Expression explicite du terme général u_n en fonction de n

Si $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Attention

Si le premier terme de la suite est u_1, on aura : $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

1.1.4. Relation entre deux termes u_m et u_p

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous naturels m et p :

$$u_m = u_p + (m - p)r.$$

1.1.5. Somme 1 + 2 + … + n où n est un entier naturel non nul

Pour tout entier naturel n non nul : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$.

Il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.

On en déduit, si $(u_n)_{n\in}$ est une suite arithmétique de raison r :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(n+1\right) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

En effet : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$= u_0 + \left(u_0 + r\right) + \left(u_0 + 2r\right) + ... + \left(u_0 + nr\right)$$

$$= u_0 + u_0 + u_0 + \dots + u_0 + r\,(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= \left(n+1\right)u_0 + r \times \frac{n\left(n+1\right)}{2} = \left(n+1\right)\frac{2u_0 + nr}{2} = \left(n+1\right)\frac{u_0 + u_0 + nr}{2}$$

On a aussi de façon analogue, si n est non nul :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}.$$

On a un résultat plus général qu'il peut être utile de retenir. La somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r se calcule ainsi :

$$S = \text{nombre de termes ajoutés} \times \frac{\text{premier terme ajouté} + \text{dernier terme ajouté}}{2}$$

On retrouve alors bien les cas particuliers précédents, concernant les sommes : $1 + 2 \ldots + n$ et $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ (il y a bien n termes ajoutés à chaque fois), et $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ (il y a bien $n + 1$ termes ajoutés).

Il peut être utile de se rappeler que le nombre de termes de u_m à u_p (avec $p > m$) est $p - m + 1$.

1.2. Suites géométriques

1.2.1. Définition

On dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique de raison q** (avec q réel fixé non nul) si, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = q \times v_n$ (« on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre »).

Remarque

Une suite géométrique de raison $q = 1$ est constante.

Méthode pour montrer qu'une suite est géométrique : Il suffit de montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est égal à un réel constant qui sera la raison de la suite. Toutefois, attention, cette méthode suppose de savoir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, v_n est non nul. Si ce point n'est pas évident, il faudra essayer d'écrire v_{n+1} sous la forme $v_{n+1} = q \times v_n$ en essayant de faire « apparaître » v_n.

Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique : On utilise trois termes consécutifs qui fournissent un contre-exemple. Si on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout naturel n non nul : $u_n = n^2$: $\frac{u_2}{u_1} = 4$ alors que : $\frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4}$. u n'est donc pas géométrique (si elle l'avait été, ces deux quotients auraient été égaux).

Attention

Trois termes ne suffiraient pas pour prouver qu'une suite EST géométrique.

1.2.2. Expression explicite du terme général v_n en fonction de n

Si $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tout naturel n :

$$v_n = q^n \times v_0.$$

Attention

Si le premier de la suite est v_1, on aura : $v_n = q^{n-1} \times v_1$.

1.2.3. Relation entre deux termes v_m et v_p

Si $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tous naturels m et p :

$$v_m = q^{m-p} \times v_p.$$

1.2.4. Sens de variation d'une suite géométrique

Si $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :

- si $q > 1$ et $v_0 > 0$, la suite est strictement croissante ;
- si $q > 1$ et $v_0 < 0$, la suite est strictement décroissante ;
- si $0 < q < 1$ et $v_0 > 0$, la suite est strictement décroissante ;
- si $0 < q < 1$ et $v_0 < 0$, la suite est strictement croissante ;
- si $q = 1$, elle est constante ;
- si $q < 0$, elle n'est pas monotone (en effet, les termes sont alternativement positifs et négatifs).

1.2.5. Somme de termes consécutifs

Si n est un entier naturel : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (il s'agit de la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de raison q et de premier terme $q^0 = 1$).

On en déduit, si $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q différente de 1 et n un entier naturel : $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

En effet : $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_0 + q \times v_0 + q^2 \times v_0 + \ldots + q^n \times v_0$

$= v_0 (1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$.

On a aussi de façon analogue, si n est non nul :

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

On a un résultat plus général qu'il peut être utile de retenir. La somme T de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de 1 se calcule ainsi :

$$T = \text{premier terme ajouté} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes ajoutés}}}{1-q}$$

On retrouve alors bien les cas particuliers précédents, concernant les sommes : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ et $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ (il y a bien $n + 1$ termes ajoutés à chaque fois), et $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ (il y a bien n termes ajoutés).

Remarque

Dans le cas peu intéressant où la suite géométrique v est constante ($q = 1$), on a : $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = (n + 1)v_0$.

⇨ *Exercices 1 à 13*

2 Limites de suites

2.1. Définitions

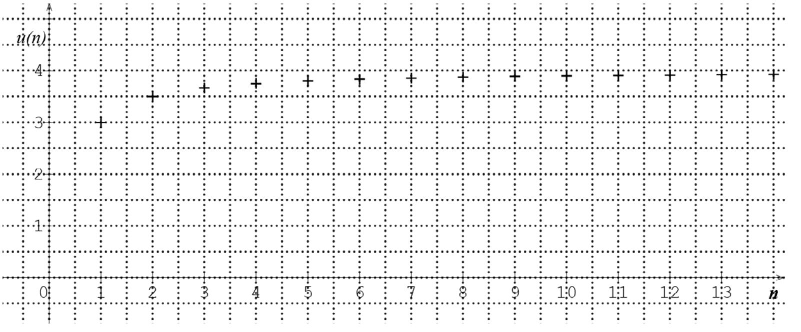
2.1.1. Suite ayant pour limite un nombre réel

On dit qu'une suite (u_n) a **pour limite *l* quand *n* tend vers $+\infty$** (avec l réel fixé) si les termes u_n peuvent être rendus aussi proches que l'on veut de l pourvu que n soit pris assez grand. On dit alors que la suite (u_n) **converge** vers l et on note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

↳ Exemples

Pour tout entier naturel n non nul, soit $u_n = 4 - \frac{1}{n}$.

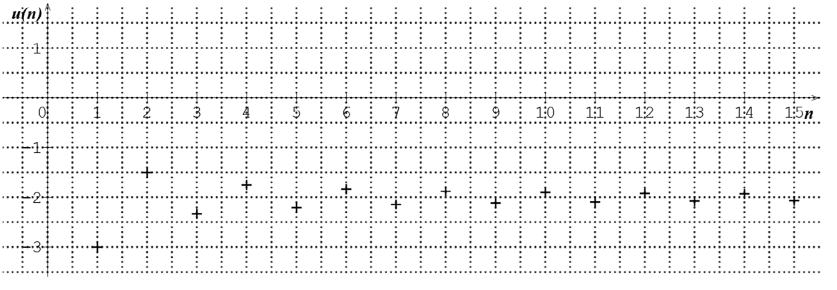
n	1	2	4	10	50	100	1 000	10 000	10^5
u_n	3	3,5	3,75	3,9	3,98	3,99	3,999	3,9999	3,99999



Au vu de ces résultats graphiques et numériques, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

Pour tout entier naturel n non nul, soit $u_n = -2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

n	1	2	3	4	5	10	50	100	10^5
u_n	–3	–1,5	≈ –2,3	–1,75	–2,2	–1,9	–1,98	–1,99	–1,99999



Au vu de ces résultats, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$.

Limites de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

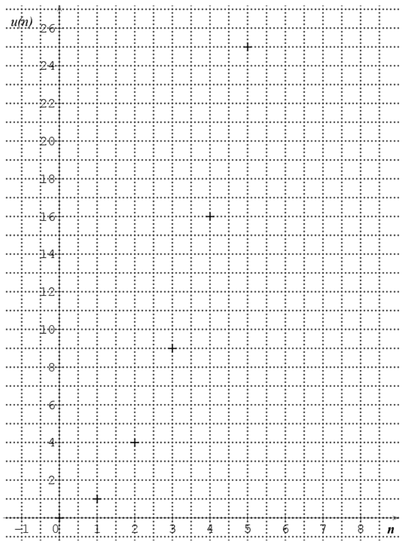
2.1.2. Suite ayant pour limite $+\infty$

On dit qu'une suite (u_n) a **pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$** si les termes u_n peuvent être rendus aussi grands que l'on veut pourvu que n soit pris assez grand. On dit alors que la suite (u_n) **diverge vers $+\infty$** et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

↳ Exemple

Pour tout entier naturel n, soit $u_n = n^2$.

n	0	1	2	3	4	5	10	100	10^5
u_n	0	1	4	9	16	25	100	10000	10^{10}



Au vu de ces résultats graphiques et numériques, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Limites de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Attention

Une suite qui diverge vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante ! Réciproquement, une suite croissante ne diverge pas forcément vers $+\infty$! Cf. exercice 14.

2.1.3. Suite ayant pour limite $-\infty$

On dit qu'une suite (u_n) a **pour limite** $-\infty$ **quand *n* tend vers** $+\infty$ si la suite opposée $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$. Cela revient à dire que les termes u_n peuvent être rendus aussi « petits » que l'on veut pourvu que n soit pris assez grand. On dit alors que la suite (u_n) **diverge vers** $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Ici, « petits » ne signifie pas « proche de 0 » mais négatif et grand en valeur absolue. Ainsi, en ce sens, $-1\,000\,000$ est « petit ».

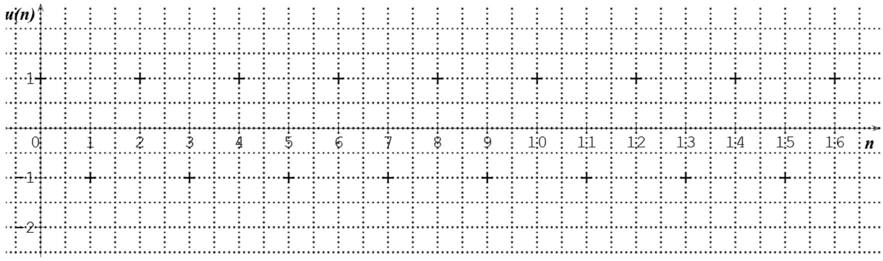
2.1.4. Suite n'ayant pas de limite

Certaines suites n'ont pas de limite, on dit qu'elles **divergent**.

Ainsi, « diverger » peut signifier pour une suite soit admettre pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, soit ne pas avoir de limite. Dit autrement, une suite divergente est une suite non convergente.

↳ **Exemple**

Pour tout entier naturel n, soit $u_n = (-1)^n$.



2.2. Limites et suites géométriques de raison positive

↳ **Exemples**

n	1	2	3	4	5	6	10	100
3^n	3	9	27	81	243	729	59 049	$\approx 5 \times 10^{47}$
2^n	2	4	8	16	32	64	1 024	$\approx 1 \times 10^{30}$
$1{,}1^n$	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,61051	$\approx 1{,}77$	$\approx 2{,}59$	$\approx 13\,781$
$0{,}9^n$	0,9	0,81	0,729	0,6561	0,59049	$\approx 0{,}53$	$\approx 0{,}35$	$\approx 3 \times 10^{-5}$
$0{,}5^n$	0,5	0,25	0,125	0,0625	$\approx 0{,}03$	$\approx 0{,}02$	$\approx 10^{-3}$	$\approx 8 \times 10^{-31}$
$0{,}1^n$	0,1	0,01	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-10}	10^{-100}

Ces exemples permettent de conjecturer le théorème suivant :