Partie II

IL ETAIT UNE FOIS LA TERMINALE : DECOUVERTE

Ça y est, les révisions sont faites, nous allons enfin pouvoir attaquer le programme de Terminale. Pas de panique, pas d'angoisse, tout va bien se passer ! Si vous pigez bien les chapitres qui suivent, vous devriez devenir le roi de la Terminale (et alors du Bac), et surtout vous éviterez de vous retrouver noyés par les nouvelles notions que les profs adorent faire à la vitesse des 24 h du Mans (et oui, la Terminale ça va vite !).

Au programme donc, nous vous avons choisi les incontournables du programme de Terminale, ce qui vous servira à obtenir votre Bac, et que vous réutiliserez en post bac (en prépa, par exemple).

Plus précisément :

- un chapitre sur **le raisonnement par récurrence** (chapitre complètement inclassable mais qui s'applique à plein de domaines : Combinatoire, Arithmétique… dont la rédaction est systématique et méthodique donc facile…) ;
- quatre chapitres d'analyse : les **limites de fonctions** (où l'on étudie tous les aspects ou presque de l'infini), **le logarithme** (une nouvelle fonction fondamentale en Maths et dans les autres disciplines comme la Physique, la Chimie, la Bio ou encore l'Economie…), **les croissances comparées** (un

chapitre sur les limites et leurs rapports de forces), et enfin le **calcul intégral** (un chapitre de calcul d'aires) ;

- pour ceux qui ont choisi **Maths expertes** l'an prochain : un chapitre sur les **nombres complexes**, domaine où se mélangent calculs, équations et géométrie (notion très importante et très payante) ;
- et surtout, à chaque fin de chapitre, des **VRAIS EXOS TOMBÉS AU BAC QUE VOUS POURREZ DÉJÀ RÉSOUDRE !** (Vous avez toujours du mal à nous croire, mais sachez que c'est notre objectif : faire de vous les meilleurs en vous préparant déjà au bac !)

La Terminale est assez exigeante et l'esprit des sujets de Baccalauréat a tendance à évoluer : on demande à l'élève de plus en plus de démarche individuelle (c'est-à-dire de recherche), ce qui demande une maîtrise totale des outils mathématiques. C'est pour vous y aider que nous avons choisi de vous exposer ces chapitres, calculatoires et techniques, car les maîtriser vous donnera **un avantage et une avance certaine** sur le programme ! L'élève qui maîtrisera ces chapitres à l'avance sera incontestablement plus **performant** sur beaucoup de contrôles de Terminale. Vous voyez, nous avons pensé à vous !

A travers ces nouveaux chapitres, vraiment typiques de la Terminale, vous allez avoir l'occasion de vous donner à fond et d'arriver en Septembre avec au moins autant d'assurance que le faux Brice de N… qui se pavane au bar de la plage avec sa planche de surf jaune, en quête d'invités pour sa Yellow…

Bon courage et bonne glisse !

6 INTRODUCTION AU RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Bien, pour commencer le programme de Terminale, on vous a choisi un chapitre qui sort complètement de l'ordinaire : la récurrence ! C'est un chapitre à rédaction méthodique, systématique, et qui rapporte pas mal de points dans les contrôles de Terminale, car le raisonnement par récurrence revient souvent dans les problèmes !

De quoi ça parle ? De formules qu'on souhaite prouver avec rigueur. Les formules en Mathématiques, sont importantes et il est capital d'arriver à les démontrer. C'est au génial Blaise Pascal (1623-1662) qu'on doit le premier raisonnement par récurrence (et également à Pierre de Fermat [1601-1665], voir épisode 6), raisonnement utilisé pour démontrer une formule de combinatoire, domaine que vous aurez le bonheur de rencontrer l'an prochain lorsque vous approfondirez le calcul des probabilités. Un exemple de formule ? Prenons celle célèbre du « petit » Gauss (1777-1855, on dit « petit » car on sait qu'il l'a découverte seulement à l'âge de sept ans, voir *Method' Première* pour l'histoire complète) :

$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. En fait cette formule que l'on démontre à l'aide d'une astuce (voir *Method' Première*) peut se démontrer d'une autre manière, tout à fait rigoureuse et avec assez peu d'efforts : en utilisant un raisonnement par récurrence, pardi ! Comment faire ? Facile, on suit la méthode que voilà !

METHODE 1 : Comment effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence ?

C'est toujours pareil :

On donne un nom, par exemple $P(n)$, à la propriété (c'est-à-dire la formule) que l'on veut démontrer.

Ensuite, pour montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$, on procède en trois étapes :

- **Etape 1 : Initialisation**. On montre que la propriété $P(1)$ est vraie, c'est-à-dire que $P(n)$ est vraie pour $n = 1$.
- **Etape 2 : Hérédité**. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ l'est encore. (Ça vous semble être du charabia ? C'est normal au début, mais vous allez voir qu'en pratique c'est toujours pareil… si, si !)
- **Etape 3 : Conclusion**. C'est comme cela que l'on rédige : comme $P(1)$ est vraie et qu'il y a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Bon, on attaque un exemple, parce que là, au secours, on comprend rien, mais alors rien du tout.

EXEMPLE : Démontrer par récurrence la propriété suivante :

Pour $n \geq 1$, $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (c'est la fameuse formule du petit Gauss, mais vous l'aviez reconnue bien sûr…)

Allons-y !

Soit $P(n)$ la propriété $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (que l'on veut démontrer).

Etape 1 : Initialisation

$P(1)$ est vraie car pour $n = 1$,

on a à gauche : 1

et on a à droite : $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$

Comme $1 = 1$, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour $n = 1$: $P(1)$ est donc vraie.

Etape 2 : Hérédité

On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ et on va montrer que $P(n+1)$ l'est encore, c'est-à-dire que l'on a :

$1+2+3+...+n+\mathbf{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (pour obtenir $P(n+1)$, on prend $P(n)$ et on remplace n par $n+1$).

Il nous faut donc montrer que $1+2+3+...+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ en ayant supposé que $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Trop facile ! Dans la somme $1+2+3+...+n+n+1$, on isole ce que l'on connaît déjà : $1+2+3+...+n$ (c'est-à-dire le début) et l'on sait que cela vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ par hypothèse (c'est ce que l'on suppose). On a donc :

$\mathbf{1+2+3+...+n}+n+1=\mathbf{\frac{n(n+1)}{2}}+n+1$ c'est-à-dire :

$1+2+3+...+n+n+1=(n+1)\times\frac{n}{2}+(n+1)$ (on va factoriser à droite par $(n+1)$)

$$1+2+3+...+n+n+1=(n+1)\times\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$1+2+3+...+n+n+1=(n+1)\times\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

$1+2+3+...+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (gagné !)

On a donc bien hérédité !

Etape 3 : Conclusion

Comme $P(1)$ est vraie et que l'on a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n\geq 1$ et donc : pour $n\geq 1$, $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Fin, terminé.

REMARQUES :

a) Il est important d'écrire ce que l'on veut prouver, c'est-à-dire d'écrire en « toutes lettres » la propriété $P(n+1)$ à démontrer.

b) Si l'on veut montrer qu'une propriété est vraie pour $n\geq 0$, on commence l'initialisation à $P(0)$, pour $n\geq 2$ on commence à $P(2)$, etc.

c) Attention, la démonstration peut paraître longue mais ici on a beaucoup détaillé. On peut aller bien plus vite en enlevant tous les petits commentaires annexes, ce qui donnerait ceci (reprenons le même exemple).

EXEMPLE : Démontrer par récurrence la propriété suivante :

Pour $n \geq 1$, $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Allons-y : soit $P(n)$ la propriété $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Etape 1 : Initialisation

$P(1)$ est vraie car $1=\dfrac{1\times(1+1)}{2}$

Etape 2 : Hérédité

Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire que $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Montrons que $P(n+1)$ l'est encore, c'est-à-dire que

$1+2+3+...+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a $\mathbf{1+2+3+...+n}+(n+1)=\dfrac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}+(n+1)$ c'est-à-dire :

$1+2+3+...+n+n+1=(n+1)\times\left(\dfrac{n}{2}+1\right)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, on a donc hérédité.

Etape 3 : Conclusion

Comme $P(1)$ est vraie et que l'on a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Voilà, inutile de faire plus long ! (Dans la partie exos, faites de même !)

Bon, fin du chapitre : ça fait plaisir un chapitre court, non ? Surtout lorsque l'on imagine l'avance sur le cours que vous venez de prendre (si en sortant de vacances vous maîtrisez bien cette méthode systématique et reconnaissons-le complètement nouvelle, vous allez « cartonner » !)

Maintenant, il va falloir mettre « la main à la pâte » et vous attaquer aux exos afin de bien retenir chacune des étapes du raisonnement par récurrence. Après tout cela, vous aurez bien mérité une bonne glace à déguster sur des galets bien durs (bonjour aux Dieppois) à l'ombre d'un parasol sur lequel il y aura écrit : les maths, j'assure ! Bonne glisse, bonne gaufre, bonnes vacances quoi !

VRAI OU FAUX ?

VRAI FAUX

1. On doit les premiers raisonnements par récurrence à Blaise Pascal (1623-1662) et à Pierre de Fermat (1601-1665).

2. C'est également à Blaise Pascal et à Pierre de Fermat que l'on doit la naissance du calcul des probabilités.

3. Le raisonnement par récurrence se fait en deux étapes.

4. Les trois étapes du raisonnement par récurrence sont : 1. Pause repos, 2. Pause apéro (avec modération) 3. Pause dodo.

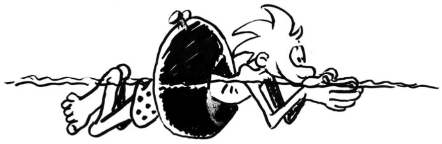
5. On considère la propriété suivante : (P_n) : $3^{2n} - 2^{2n-2}$ est un multiple de 7. Alors :

a) La propriété (P_n) est héréditaire.

b) La propriété (P_n) est vraie pour tout n.

6. Le raisonnement par récurrence est un excellent moyen de démontrer bon nombre de formules.

7. On peut démontrer par récurrence que les maths sont une matière pénible (enfin exigeante, voire très exigeante).



EXERCICES

Exercice 1

Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **(Bac)**

c) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

d) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

e) pour $x \in]-1;+\infty[$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$

(inégalité de Bernoulli (1654-1705))

f) $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et

$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ ($f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f) (On utilisera le fait que $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$).

Exercice 2

a) Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

b) Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $q \neq 1$.

(C'est la généralisation du résultat précédent.)

Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$. Montrer par récurrence que (U_n) est majorée par 2 (c'est-à-dire que pour tout $n \geq 0$, $U_n \leq 2$).

Exercice 4

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$. Montrer par récurrence que (U_n) est minorée par 2 (c'est-à-dire que pour tout $n \geq 0$, $U_n \geq 2$).

Exercice 5

Montrer par récurrence que pour $n \geq 3$, $3^{2n} - 2^{n-3}$ est un multiple de 7.

Exercice 6 (Bac)

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n > n^2$.