Axe de symétrie d'une parabole (1)

Rappel

La parabole d'équation $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

Exemple : donner une équation de l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 5(x-2)^2 + 1$.
Ici $\alpha = 2$, la parabole admet donc pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$.

Exercices

Donner l'axe de symétrie de la parabole d'équation :

1. $y = 3(x-4)^2 - 7$

2. $y = 2\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - 6$

3. $y = 6(x+2)^2 + 1$

4. $y = 9 - 4(x+1)^2$

Axe de symétrie d'une parabole (2)

Rappel

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemple : déterminer une équation de l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 3x^2 + 8x - 1$.

Ici $a = 3$ et $b = 8$, donc $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \times 3} = -\frac{4}{3}$.

La parabole admet donc pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{4}{3}$.

Exercices

Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation :

1. $y = 5x^2 + 30x - 7$

2. $y = x^2 - 6x + 5$

3. $y = 12x - 2x^2 + 1$

4. $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{6}$

5. $y = -3x^2 + \frac{5}{3}x - 4$

6. $y = \frac{6}{11}x^2 + 4x - \frac{5}{3}$

Sommet d'une parabole (1)

Rappel

La parabole d'équation $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ admet pour sommet le point $S(\alpha\ ;\beta)$.

Exemple : donner les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y=5(x-7)^2+3$.

Ici $\alpha=7$ et $\beta=3$, donc la parabole admet pour sommet le point $S(7\ ;3)$.

Exercices

Donner les coordonnées du sommet de la parabole d'équation :

1. $y=2(x-9)^2+11$

2. $y=6\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{2}{3}$

3. $y=4(x+5)^2+1$

4. $y=7\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-9$

5. $y=12-3(x+7)^2$

Sommet d'une parabole (2)

Rappel

La parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ admet pour sommet le point $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ où $f(x)=ax^2+bx+c$.

Exemple : déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y=2x^2+12x-5$.

Ici $a=2$, $b=12$ et $f(x)=2x^2+12x-5$,

donc $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{12}{2\times 2}=-3$.

On a $f(-3)=2\times(-3)^2+12\times(-3)-5=-23$.

Ainsi la parabole admet pour sommet le point $S(-3\,;-23)$.

Exercices

Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation :

1. $y=3x^2+6x+2$

2. $y=5x^2-10x-4$

3. $y=12x-x^2-5$

4. $y=\dfrac{3}{4}x^2-7x+\dfrac{1}{3}$

5. $y=2x^2-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{3}{5}$

6. $y=\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{15}{2}x+3$

Extremum d'une fonction trinôme (1)

Rappel

La fonction trinôme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ admet :

- si $a>0$, un minimum lorsque $x=\alpha$ et ce minimum vaut β ;
- si $a<0$, un maximum lorsque $x=\alpha$ et ce maximum vaut β.

Exemple : donner l'extremum de la fonction *f* définie par $f(x)=-7(x-3)^2+4$.

Ici $a=-7$, $\alpha=3$ et $\beta=4$.

$a=-7<0$ donc la fonction admet un maximum lorsque $x=3$.

Ce maximum vaut alors 4.

Exercices

Donner l'extremum de la fonction *f* définie par :

1. $f(x)=6(x+5)^2+2$

2. $f(x)=9-2(x+1)^2$

3. $f(x)=7(x+8)^2-3$

4. $f(x)=4(x-3)^2-6$

5. $f(x)=-5-(x-2)^2$

Extremum d'une fonction trinôme (2)

Rappel

La fonction trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ admet :

- si $a>0$, un minimum lorsque $x=-\dfrac{b}{2a}$ et ce minimum vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$;
- si $a<0$, un maximum lorsque $x=-\dfrac{b}{2a}$ et ce maximum vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Exemple : déterminer l'extremum de la fonction f définie par $f(x)=x^2-6x+5$.

Ici $a=1$ et $b=-6$, donc $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-6}{2\times 1}=3$.

On a $f(3)=3^2-6\times 3+5=-4$.

$a=1>0$ donc la fonction admet un minimum lorsque $x=3$.

Ce minimum vaut alors -4.

Exercices

Déterminer l'extremum de la fonction *f* définie par :

1. $f(x)=-3x^2+6x-1$

2. $f(x)=2x^2-10x+3$

3. $f(x)=14x-x^2+9$

4. $f(x)=-4x^2-12x+5$

5. $f(x)=6x^2-20x-\dfrac{1}{3}$

Thème 1 · Jour 7

Mise sous forme canonique

Rappel

Mettre le trinôme ax^2+bx+c sous forme canonique, c'est regrouper les termes ax^2 et bx en un seul carré.

***Exemple 1* :** mettre le trinôme $x^2-3x+\frac{1}{4}$ sous forme canonique.

$$x^2-3x+\frac{1}{4}=x^2-2\times\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2\,.$$

***Exemple 2* :** mettre le trinôme $3x^2+4x-2$ sous forme canonique.

$$3x^2+4x-2=3\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)-2=3\left(x^2+2\times\frac{2}{3}x\right)-2$$

$$=3\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)-2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-2$$

$$=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{10}{3}\,.$$

Exercices

Mettre sous forme canonique les trinômes :

1. $x^2+10x-3$

2. x^2-7x+1

3. $2x^2-32x+5$

4. $5x^2+15x-2$

5. $-3x^2+12x-7$

Racine d'un trinôme

Rappel

Soient ax^2+bx+c un trinôme et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

- si $\Delta<0$ alors pas de racine réelle ;
- si $\Delta=0$ alors une racine $x_0=-\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta>0$ alors deux racines réelles $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple : déterminer les racines du trinôme $3x^2+x-10$.

Ici $a=3$, $b=1$ et $c=-10$.

On calcule le discriminant $\Delta=1^2-4\times3\times(-10)=121$.

$\Delta>0$, par conséquent le trinôme possède deux racines réelles :

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{121}}{2\times3}=-2$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{121}}{2\times3}=\dfrac{5}{3}$.

Exercices

Déterminer les racines éventuelles des trinômes :

1. $4x^2-23x+15$

2. $7x^2+26x+25$

3. $-2x^2-7x+30$

4. $9x^2+12x+4$

5. x^2-6x+4

6. $14x-3x^2-8$