Partie I

Mécanique

Fiche 1

Changement de référentiel en mécanique

1 Formule de Bour et Varignon

La loi de Bour est à la base des principales lois de ce chapitre. Elle est au cœur de la transformation qui s'opère lors d'un changement de référentiel. Elle n'est cependant pas mentionnée dans le programme actuel.

Voici le principe : Prenons un référentiel R' en mouvement de rotation Ω par rapport à un référentiel absolu R, et étudions l'accélération et la vitesse d'un point M dans ce référentiel.

Dans le référentiel R, la vitesse de M s'écrit : $\overrightarrow{V_R} = V_x.\overrightarrow{u_x} + V_y.\overrightarrow{u_y} + V_z.\overrightarrow{u_z}$

Dans le référentiel R', elle s'écrit : $\overrightarrow{V_{R'}} = V_{x'}.\overrightarrow{u_{x'}} + V_{y'}.\overrightarrow{u_{y'}} + V_{z'}.\overrightarrow{u_{z'}}$

La dérivée d'un vecteur dans un référentiel fixe ou en translation rectiligne est simple (le point désignant la dérivée temporelle) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{R'}}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} = \dot{V}_{x'}.\overrightarrow{u_{x'}} + \dot{V}_{y'}.\overrightarrow{u_{y'}} + \dot{V}_{z'}.\overrightarrow{u_{z'}}$$

En rotation cependant, les vecteurs se dérivent ainsi :

$$\dot{\overrightarrow{u_{x'}}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u_{x'}}$$

Les variations de vitesse par rapport à un référentiel en rotation donnent donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{R'}}}{\mathrm{d}t}\right|_{R} = \frac{\mathrm{d}\left(V_{x'}.\overrightarrow{u_{x'}} + V_{y'}.\overrightarrow{u_{y'}} + V_{z'}.\overrightarrow{u_{z'}}\right)}{\mathrm{d}t}$$

Sachant que $(uv)' = u'v + uv'$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{R'}}}{\mathrm{d}t}\right|_{R} = \left(\dot{V}_{x'}.\overrightarrow{u}_{x'} + \dot{V}_{y'}.\overrightarrow{u}_{y'} + \dot{V}_{z'}.\overrightarrow{u}_{z'}\right) + \left(V_{x'}.\dot{\overrightarrow{u}}_{x'} + V_{y'}.\dot{\overrightarrow{u}}_{y'} + V_{z'}.\dot{\overrightarrow{u}}_{z'}\right)$$

Cela donne la **formule de Bour** : $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{R'}}}{\mathrm{d}t}\right|_{R} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{R'}}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_{R'}}}$

Appliquée à $\overrightarrow{O'M}$, c'est la **formule de Varignon** : $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$

2 Démonstrations des lois de composition

2.1 Composition des vitesses

Prenons maintenant un référentiel R' en mouvement de translation **et** de rotation par rapport à un référentiel absolu R, et étudions un point M dans ce référentiel.

Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_R + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_R$$

Pour le 2^e^ terme, on utilise la formule de Varignon :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \overrightarrow{v}_{O'/O} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

D'où,

$$\boxed{\overrightarrow{v}_R = \overrightarrow{v}_{O'/O} + \overrightarrow{v}_{R'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

Note : Quand je vois $\overrightarrow{v}_{R'}$ je ne me dis pas "*v de* R'" mais plutôt "*v dans* R'" sous-entendu : la vitesse de M dans R'. La différence est fondamentale puisque penser "*v de* R'" correspondrait plutôt au terme $\overrightarrow{v}_{O'/O}$. Il est important de comprendre le sens de chacun des termes et leur lien avec le mouvement décrit.

Translation rectiligne : $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$

Rotation simple : O' ne bouge pas par rapport à O donc $\overrightarrow{v}_{O'/O} = \overrightarrow{0}$

2.2 Composition des accélérations

Il nous suffit de dériver la loi de composition des vitesses et d'utiliser, au cours des calculs, la formule de Varignon, et la formule de Bour !

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_R}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{O'/O}}{\mathrm{d}t}\right|_R + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{R'}}{\mathrm{d}t}\right|_R + \left.\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_R$$

... calculs (à faire si possible ils sont très formateurs !) ...

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{/R} = \overrightarrow{a}_{/R'} + \overrightarrow{a}_{O'/O} + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_{/R'} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}$$

3 Relation fondamentale de la dynamique (RFD)

La loi de composition des accélérations nous donne directement :

$$\boxed{m\vec{a}_{/R'} = m\vec{a}_{/R} - m\vec{a}_{O'/O} - 2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{/R'} - m\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\overrightarrow{O'M} - m\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}$$

$$\begin{cases} m\vec{a}_{/R} \;\rightarrow\; \text{forces appliquées à l'objet sans tenir compte du mouvement} \\ -m\vec{a}_{O'/O} \;\rightarrow\; \text{force d'inertie du référentiel} \\ -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{/R'} = -m\vec{a_c} \;\rightarrow\; \text{force d'inertie de Coriolis} \\ -m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\overrightarrow{OM} \;\rightarrow\; \text{cadre de la prépa} \;=\; \vec{0} \text{ car rotation uniforme} \\ -m\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) \;\rightarrow\; \text{force d'inertie centrifuge} \end{cases}$$

On note parfois :

$$\begin{cases} \vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{/R'} \\ \vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} = -m\vec{a}_{O'/O} - m\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right) \end{cases}$$

Nous venons de définir la force de Coriolis ainsi que la force d'inertie d'entraînement. Qu'est-ce qui distingue fondamentalement ces deux forces ?

La **force d'inertie d'entraînement** allie deux accélérations. Le premier terme signifie que si le repère R' accélère par rapport à R alors il y a force d'inertie qui se crée. Exemple : si une voiture (R') accélère brutalement sur une route (R), alors le passager ressentira une force. Le second terme correspond à la force centrifuge, elle est liée à la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ comme on peut le voir. Exemple : un enfant sur un tourniquet va être accéléré vers l'extérieur de celui-ci.

La **force d'inertie de Coriolis**, quant à elle, n'apparaît que dans un seul cas bien précis : si le point M se déplace dans le repère R'. Exemple : un enfant qui se déplacerait sur un tourniquet. En revanche, s'il ne se déplace pas, $\vec{v}_{/R'} = \vec{0}$ et l'enfant ne subira que les forces d'inertie d'entraînement.

Translation rectiligne : $\vec{\Omega} = 0$ donc $\vec{a_e} = \vec{a}_{O'/O}$.

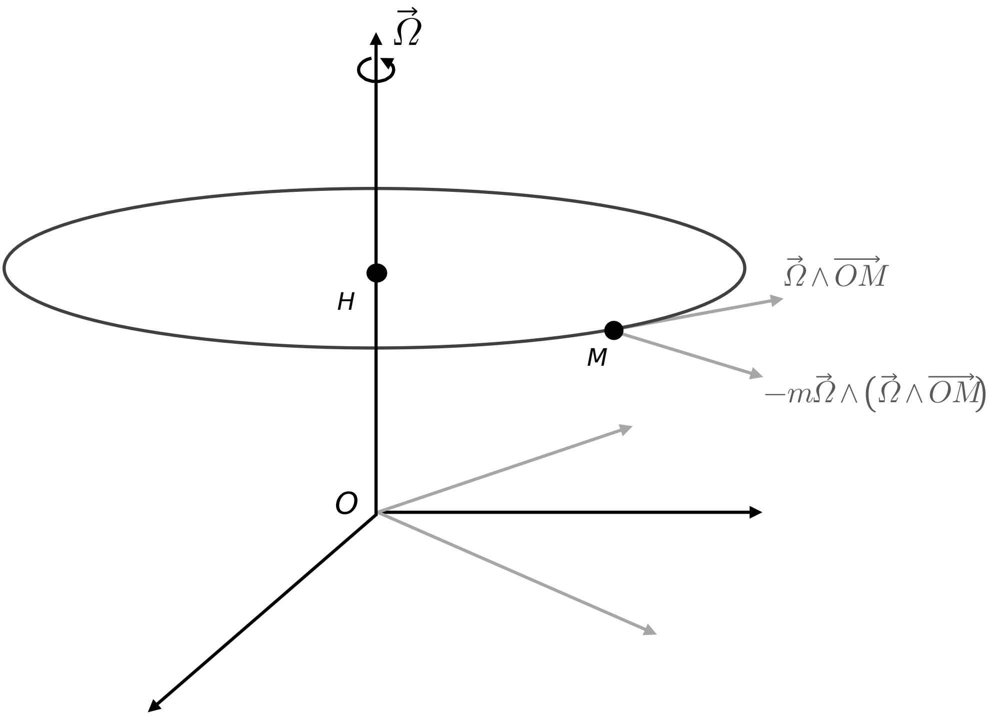
Rotation : $\vec{a}_{O'/O} = \vec{0}$ et $\vec{a_e} = \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$. Si M bouge : $\vec{a_c} = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{/R'}$.

3.1 Force centrifuge ou axifuge ?

On se place dans un référentiel R et on prend un objet en rotation circulaire uniforme autour d'un axe z. On suit cette rotation par un référentiel R' tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. Nous venons de voir que l'objet subit en fait une force d'entraînement telle que :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

Faisons un schéma et déterminons le sens et la direction de cette force :



On remarque que la force qu'on appelle *force centrifuge* est en fait une force qui, en 3D, fuit l'axe de rotation, il aurait donc été plus logique d'appeler cette force, force *axifuge*...

Remarquons aussi que le vecteur accélération étant l'opposé de la force divisée par m, celle-ci est dirigée vers l'axe. L'accélération est dite centripète.

Remarque : On montre facilement que la force peut s'écrire : $\boxed{\overrightarrow{F_{ie}} = m\Omega^2 \mathrm{HM}\overrightarrow{u_{\mathrm{HM}}}}$.

Avec HM la distance axe-point et $\overrightarrow{u_{\mathrm{HM}}}$ le vecteur axifuge.

4 Application : un train

Un train roule en direction du Nord et se trouve en ce moment à Paris.

1) La rotation de la Terre à tendance à alléger la force gravitationnelle subie par le train, estimer la valeur de la force centrifuge.

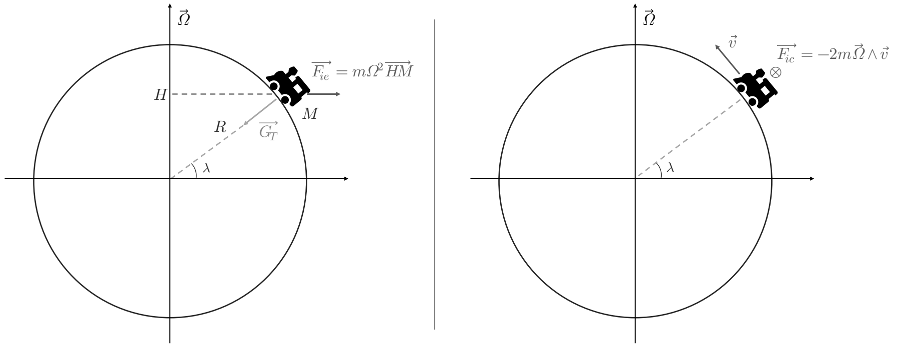
2) La rotation de la Terre a tendance à abîmer un des deux côtés des rails. Lequel ? Avec quel impact ?

Question 1

Prenons R le référentiel géocentrique, fixe, pointant vers 3 étoiles lointaines. Puis R' le référentiel terrestre en **rotation** en même temps que la Terre. Parmi les forces s'appliquant au train, il y a la force centrifuge :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = m\Omega^2\overrightarrow{\text{HM}}$$

En se souvenant qu'elle est en fait *axifuge* nous pouvons la dessiner à gauche ci-dessous :



Force centrifuge (à gauche) et force de Coriolis (à droite) sur un train à Paris

Remarque : $m\overrightarrow{G_T} + \overrightarrow{F_{ie}} = m\overrightarrow{g}$ avec G_T la constante de gravitation universelle.

Autrement dit, nous venons de voir que : poids = force gravitationnelle + centrifuge !