Chapitre 1

les torseurs

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

On appelle torseur que l'on note $[T] = \left[\vec{R}, \vec{H}(P)\right]$ tout champ de vecteurs $\vec{H}(P)$ pour lequel il existe un vecteur $\vec{R}$, inépendant de P, tel que ∀ (P, Q) on a :

$$\boxed{\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}}$$

Cette relation permet de déterminer le moment en un point Q du torseur connaissant son moment en un point P.

1.1.2 Eléments de réduction

Les éléments de réduction de $[T]$ sont donnés par :

$$\boxed{[T] = \quad {}_{P}\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{H}(P) \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}}$$

— Le vecteur $\vec{R}$ est appelé la résultante du torseur $[T]$.
— Le vecteur $\vec{H}(P)$ est appelé le vecteur moment au point P ou moment au point P du torseur $[T]$.

Les vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{H}(P)$ sont appelés les éléments de réduction au point P du torseur [T].

1.1.3 Champ équiprojectif

Définition

Un champ $\vec{H}$ est équipojectif si, et seulement si, pour tout points A et B, on a :

$$\vec{H}(A).\overrightarrow{AB} = \vec{H}(B).\overrightarrow{AB}$$

Théorème de Delassus : Tout champ équiprojectif est antisymétrique et réciproquement.

Remarques :

– Un torseur est un champ antisymétrique ou équiprojectif.

1.1.4 Invariant scalaire ou automoment

L'invariant d'un torseur $[T]$ est le réel, noté I_S défini comme le produit scalaire des éléments de réduction de $[T]$ au point P :

$$\boxed{I_S = \vec{R}.\vec{H}(P)}$$

L'invariant scalaire est, bien entendu, indépendant du point P.

1.1.5 Invariant vectoriel

L'invariant vectoriel d'un torseur, de résultante non nulle, correspond au vecteur projection orthogonal du moment sur la résultante :

$$\boxed{\vec{I}_V = \frac{I_S}{\vec{R}^2}\vec{R}}$$

Remarques :

- La résultante générale $\vec{R}$ est aussi un invariant vectoriel, en effet elle est indépendante du point P.

- Si $\vec{R} = \vec{0}$, l'invariant vectoriel est le moment du torseur en un point P, il est noté :

$$\boxed{\vec{I}_V = \vec{H}(P)}$$

1.2 Axe central

1.2.1 Définition

On appelle axe central (Δ) d'un torseur $[T]$ de résultante $\vec{R} \neq \vec{0}$, l'ensemble des points P où le moment $\vec{H}(P)$ est colinéaire à la résultante $\vec{R}$:

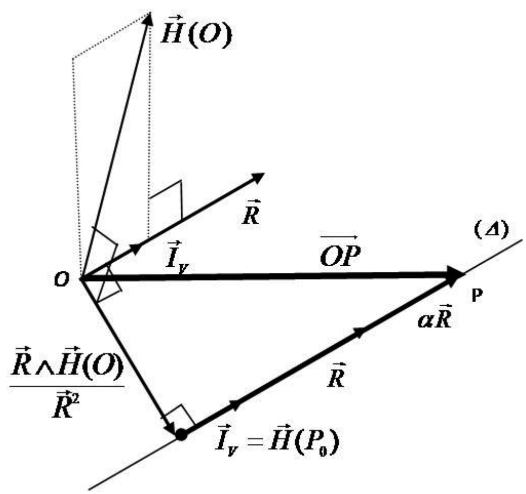
$$\boxed{\Delta = \left\{ P / \vec{H}(P) = \lambda \vec{R} \right\}}$$

où $\lambda = \dfrac{I_S}{\vec{R}^2}$ est le pas du torseur.

1.2.2 Équation vectorielle - Détermination géométrique

L'axe central (Δ) d'un torseur $[T]$ est la droite parallèle à $\vec{R}$ dont l'équation vectorielle est donnée par :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \underbrace{\frac{\vec{R} \wedge \vec{H}(O)}{\vec{R}^2}}_{\perp \vec{R}} + \underbrace{\alpha \vec{R}}_{//\vec{R}} = \overrightarrow{OP_0} + \alpha \vec{R}}$$



1.3 Opérations sur les torseurs

1.3.1 Egalité

Deux torseurs sont égaux s'ils ont mêmes éléments de réductions en un point, réciproquement s'ils ont mêmes éléments de réduction en un point, alors ils sont égaux :

Deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ sont égaux $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{H}_1(P) = \vec{H}_2(P) \end{cases}$

1.3.2 Addition de deux torseurs

La somme de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ au même point P est le torseur $[T]$ défini par :

$$[T] = [T_1]_P + [T_2]_P \Longleftrightarrow \quad {}_P\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{H}(P) = \vec{H}_1(P) + \vec{H}_2(P) \end{cases}$$

1.3.3 Multiplication d'un torseur par un scalaire

La multiplication d'un torseur $[T]$ par un scalaire λ est le torseur $[T_1]$ défini par :

$$[T_1] = \lambda [T]_P \iff \quad {}_P\begin{cases} \vec{R}_1 = \lambda \vec{R} \\ \vec{H}_1(P) = \lambda \vec{H}(P) \end{cases}$$

1.3.4 Produit ou comoment

Le produit ou comoment de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ est le scalaire défini par :

$$[T_1] \otimes [T_2] = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{H}_1(P) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{H}_2(P) \end{pmatrix} = \vec{R}_1.\vec{H}_2(P) + \vec{R}_2.\vec{H}_1(P)$$

Ce nombre est aussi un invariant scalaire, il est indépendant du point P.

1.4 Torseurs particuliers

Il existe deux torseurs particuliers que l'on retrouve souvent dans les exercices. Ce sont deux torseurs simples que l'on appelle les glisseurs et les couples.

1.4.1 Glisseur

On appelle glisseur et on le note $[G]$, tout torseur $[T]$, de résultante $\vec{R}$ non nulle et dont le moment en un point P est nul.

$$[T] \text{ est un glisseur } [G] \Leftrightarrow \quad {}_P\begin{cases} \vec{R} \neq \vec{0} \\ \vec{H}(P) = \vec{0} \end{cases}$$

On remarque que pour ce torseur l'invariant scalaire $I_s = 0$. On dit qu'un torseur est un glisseur si $I_s = 0$ et $\vec{R} \neq 0$

Axe central d'un glisseur La droite $(\Delta) = (P, \vec{R})$ est appelée axe du glisseur ou axe central du glisseur et le torseur y prend des valeurs nulles.

Propriété importante

S'il existe deux points tels que le moment est nul en ces deux points, alors l'axe central passe par ces deux points.

1.4.2 Couple

Un torseur $[T]$ est un couple $[C]$, si et seulement si, sa résultante $\vec{R}$ est nulle et dont le moment en un point P est non nul.

$$[T] \text{ est un couple } [C] \Leftrightarrow \quad {}_P\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{H}(P) \neq 0 \end{array} \right.$$

- Un couple n'admet pas d'axe central .
- Le champ antisymétrique associé à un couple $[C]$ est uniforme : $\vec{H}(P) = \overrightarrow{Cte}$.
- L'invariant scalaire est également nul pour ce torseur. Un couple est le torseur tel que $I_s = 0$ et $\vec{H}(P) \neq 0$.

Un torseur $[T]$ est un couple $[C]$, si et seulement si, sa résultante $\vec{R}$ est nulle et dont le moment en un point est non nul.

1.4.3 Torseur nul

C'est un torseur pour lequel la résultante $\vec{R} = \vec{0}$ et le moment en tout point P, $\vec{H}(P) = \vec{0}$.

Chapitre 2

Cinématique du solide

2.1 Paramétrage d'un solide - Angles d'Euler

2.1.1 Paramètres de position

La position et l'orientation d'un solide dans l'espace, sont définies par au maximum **six paramètres** appelés **paramètres de position**. Ce sont les composantes d'un point lié au solide et trois composantes de rotation.

2.1.2 Equations de liaison

Une équation de liaison s'exprime par des relations contenant les paramètres de position q_i, de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{q}_i$ et éventuellement le temps t. Il en existe deux types :

– les liaisons de type géométrique qui s'expriment par des équations contenant les paramètres q_i, et parfois le temps.

$$f_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, p$$

– les liaisons de type cinématique qui s'expriment par des équations contenant les paramètres q_i, les vitesses $\dot{q}_i$ et éventuellement le temps.

$$f_i(q_1, q_2, \cdots, \dot{q}_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t) = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, p'$$

2.1.3 Nombre de degré de liberté d'un solide

Le nombre de degrés de liberté d'un solide = Nombre de paramètres de position - Nombre d'équations de liaison indépendantes.

2.1.4 Angles d'Euler

On appelle **angles d'Euler**, notées habituellement (ψ, θ, φ), les trois angles qui permettent d'orienter une base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ liée à un solide par rapport à une base de référence $(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0)$.

2.1.5 Figures de calcul

Les angles d'Euler $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ définissent toutes les possibilités de rotation d'un solide dans l'espace.

Première rotation : précession

Comme $\vec{u}$, $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ sont dans le même plan perpendiculaire au vecteur $\vec{z}_0$, la rotation plane $\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0)$ d'angle $\psi = \widehat{(\vec{x}_0, \vec{u})}$ et d'axe $\vec{z}_0$ transforme le repère $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en $R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ avec $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0$.

$$R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0)} R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$$

Dans cette rotation le vecteur $\vec{x}_0$ se transforme en $\vec{u}$ et le vecteur $\vec{y}_0$ en un nouveau vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ qu'on note $\vec{v}$. Les quatre vecteurs $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans le plan perpendiculaire au vecteur $\vec{z}_0$.

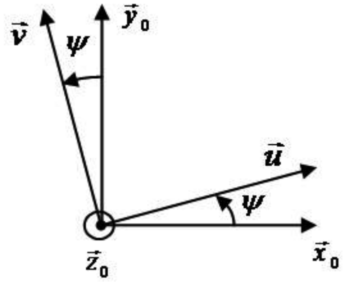


FIGURE 2.1 – Angle de précession

Le changement de base du repère R_0 au repère R_1 est donné par :

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\psi\vec{x}_0 + \sin\psi\vec{y}_0 \\ \vec{v} = -\sin\psi\vec{x}_0 + \cos\psi\vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta/\vec{z}_0) \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$