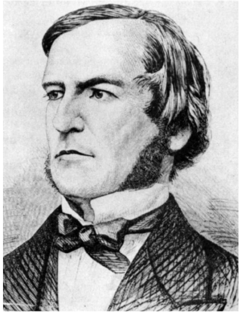
Chapitre 1

Logique et raisonnements

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement. Au milieu du XIX^{e}, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur. Au tournant du XX^{e} siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- Manipuler les quantificateurs.
- Raisonner par implication ou par équivalence.
- Utiliser un raisonnement par l'absurde ou par contraposition.
- Effectuer un raisonnement par récurrence simple ou double.

et plus si affinités

- Appliquer une récurrence forte.
- Raisonner par analyse-synthèse.

Résumé de cours

Rudiments de logique

Connecteurs logiques

Définition : *Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).*

Définition : *Soit P et Q deux propositions.*
*La **négation** de P est la proposition, notée **non P**, définie par :*

- *non P est vraie lorsque P est fausse ;*
- *non P est fausse lorsque P est vraie.*

*La **conjonction** de P et de Q est la proposition, notée **P et Q**, définie de la manière suivante :*

- *P et Q est vraie lorsque P et Q sont vraies ;*
- *P et Q est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.*

*La **disjonction** de P et de Q est la proposition, notée **P ou Q**, définie de la manière suivante :*

- *P ou Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;*
- *P ou Q est fausse lorsque P et Q sont fausses.*

Définition : *Soit P et Q deux propositions.*
*L'**implication** P entraîne Q est la proposition, notée $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ définie par non P ou Q.*

*L'**équivalence** de P et de Q est la proposition, notée $\boldsymbol{P \iff Q}$, définie par la conjonction $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.*

Vocabulaire : *La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou encore « **si** P **alors** Q ». La proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit également « P **si et seulement si** Q ».*

Remarques :

- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q, ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.
- Lorsque $P \iff Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q. Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

Table de vérité des connecteurs logiques

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque : d'après cette table de vérité, si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**.

Règles de calcul

Proposition 1.1.— Règles de calcul pour la conjonction, la disjonction —. Soit P, Q et R trois assertions. Alors

- $P\, ou\, Q \iff Q\, ou\, P$
- $(P\, ou\, Q)\, ou\, R \iff P\, ou\, (Q\, ou\, R)$
- $P\, ou\, (Q\, et\, R) \iff (P\, ou\, R)\, et\, (P\, ou\, R)$
- $P\, et\, Q \iff Q\, et\, P$
- $(P\, et\, Q)\, et\, R \iff P\, et\, (Q\, et\, R)$
- $P\, et\, (Q\, ou\, R) \iff (P\, et\, Q)\, ou\, (P\, et\, R)$

Proposition 1.2.— Règles de calcul pour la négation —. Soit P et Q deux assertions. Alors

- *non* $($*non* $P) \iff P$
- *non* $(P$ *et* $Q) \iff ($*non* $P)$ *ou* $($*non* $Q)$
- *non* $(P$ *ou* $Q) \iff ($*non* $P)$ *et* $($*non* $Q)$
- *non* $(P \Rightarrow Q) \iff P$ *et* $($*non* $Q)$

Théorème 1.3.— Soit P et Q deux propositions.

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \iff (non\ Q \Rightarrow non\ P)}$$

Vocabulaire : *L'implication non $Q \Rightarrow$ non P est appelée la* ***contraposée*** *de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

■ Quantificateurs

Définition : *Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.*

- **Quantificateur universel :** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E, on écrit :*

  $$\boxed{\forall x \in E,\ P(x)}$$

  Le symbole $\forall$ est appelé ***quantificateur universel*** *et se lit «* ***quel que soit*** *».*

- **Quantificateur existentiel —.** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, on écrit :*

  $$\boxed{\exists x \in E,\ P(x)}$$

  Le symbole $\exists$ est appelé ***quantificateur existentiel*** *et se lit «* ***il existe*** *».*

Proposition 1.4.— Négation des propositions avec quantificateurs —.

- La négation de la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est : $\exists x \in E,\ non\ P(x)$.
- La négation de la proposition $\exists x \in E,\ P(x)$ est : $\forall x \in E,\ non\ P(x)$.

Remarque : attention, l'ordre des quantificateurs est très important. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition. Pour s'en convaincre, on pourra consulter le **Vrai/Faux**.

■ Modes de raisonnement

Théorème 1.5.— Soit P et Q des propositions.

- **Preuve par déduction**

• **Si** Q est vraie • **Si** $Q \Rightarrow P$ est vraie	**Alors** P est vraie

- **Preuve par disjonction de cas**

• **Si** $Q \Rightarrow P$ est vraie • **Si** $non(Q) \Rightarrow P$ est vraie	**Alors** P est vraie

- **Preuve par l'absurde**

• **Si** $non(P) \Rightarrow Q$ est vraie • **Si** $non(P) \Rightarrow non(Q)$ est vraie	**Alors** P est vraie

■ Raisonnement par récurrence

Théorème 1.6.— Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ —. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1.7.— Principe de récurrence —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.8.— Récurrence double —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** les propriétés $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1))$ implique $\mathcal{P}(n+2)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.9.— Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs) —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\Big(\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ et $\cdots$ et $\mathcal{P}(n)\Big)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Méthodes

Démontrer une proposition

Méthode 1.1.— Comment démontrer une proposition par déduction
Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**. C'est un principe très simple que l'on utilise en permanence : si l'on sait qu'une proposition P est vraie (propriété du cours, résultat d'une question antérieure...) et que l'on sait démontrer $P \Rightarrow Q$, alors on a démontré que la proposition Q est vraie.

Exemple : montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$.
On a $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$. Or, $(x-2)^2 \geqslant 0$ (le carré d'un réel est positif) et $1 > 0$. Par conséquent, $(x-2)^2 + 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Mise en œuvre : tous les exercices !

Méthode 1.2.— Comment démontrer une proposition par disjonction de cas
On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une proposition est vraie. C'est le principe d'une démonstration par **disjonction de cas**. En particulier, si l'on souhaite démontrer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut prouver la proposition pour tous les éléments d'une partie A de E, puis pour les éléments de E n'appartenant pas à A.

Exemple : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ en distinguant les cas n pair ou impair.

- Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
- Si n est impair, on a $n = 2p+1$, où $p \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = (2p+1)(p+1) \in \mathbb{N}$.

Finalement, pour tout entier naturel n, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.5, exercice 1.6.

Méthode 1.3.— Comment démontrer une proposition par l'absurde
Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde**. Pour cela, on suppose que P est fausse et on démontre que l'on aboutit alors à une contradiction.

Exemple : montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.
Nous allons démontrer cette proposition en raisonnant par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un entier naturel N_0 supérieur à tous les autres. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N_0$. La relation est donc vraie pour l'entier $n = N_0 + 1$, donc $N_0 + 1 \leqslant N_0$; d'où $1 \leqslant 0$, ce qui est faux ! Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Mise en œuvre : exercice 1.9, exercice 1.12.

■ Démontrer une implication

> **❏ Méthode 1.4.— Comment démontrer une implication par raisonnement direct**
> Pour montrer directement l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. La démonstration commence par « supposons que P est vraie » et se termine par « Q est vraie ».

Exemple : démontrer que, pour x et y réels, $x^2 = y^2 \Longrightarrow |x| = |y|$.
Soit x et y deux réels tels que $x^2 = y^2$. On a donc $x^2 - y^2 = 0$, soit $(x-y)(x+y) = 0$.
Par conséquent, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Ainsi, $x = y$ ou $x = -y$, ce qui signifie que $|x| = |y|$ (x et y sont égaux ou opposés). On a donc démontré l'implication attendue.

> **❏ Méthode 1.5.— Comment démontrer une implication par contraposition**
> Le raisonnement par contraposition est basé sur le **théorème 1.3** :
>
> l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.
>
> Ainsi, pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut prouver que l'implication *non* $Q \Rightarrow$ *non* P est vraie. En pratique, on suppose donc que *non* Q est vraie et on montre que *non* P est vraie.

Exemple : soit n un entier naturel. Montrer que, si n^2 est pair, alors n est pair.

La proposition à démontrer s'écrit : « n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair ». Nous allons raisonner par contraposition en démontrant la proposition (équivalente) : « n n'est pas pair $\Rightarrow$ n^2 n'est pas pair », c'est-à-dire « n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair ». Considérons un entier impair n : il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, ce qui s'écrit aussi $n^2 = 2p+1$, où $p = 2k^2+2k$. Par conséquent, n^2 est un entier impair, ce qui démontre l'implication : si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, nous avons donc montré l'implication : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exemple : montrer l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Nous allons de nouveau utiliser la contraposée en démontrant l'implication « $1+x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ». Soit x un réel tel que $1 + x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = (1 + x) - 1$. Or $1 + x$ est un nombre rationnel (hypothèse), et 1 aussi. Par conséquent, $(1 + x) - 1$ est un nombre rationnel, ce qui montre que $x \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, on a démontré l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Mise en œuvre : exercice 1.8

> **❏ Méthode 1.6.— Comment démontrer une implication par l'absurde**
> L'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition *non* P *ou* Q, sa négation est donc P *et non* Q.
> Pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Rightarrow Q$:
>
> - on suppose que P est vraie et que Q est fausse ;
> - on montre que cela aboutit à une contradiction.

Méthodes

Exemple : soit $x, y \in \mathbb{R}^+$. En raisonnant par l'absurde, montrer que, si $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, alors $x = y$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ **et** $x \neq y$ (P est vraie, Q est fausse). Il en résulte que $x(1+x) = y(1+y)$, d'où l'on tire $x^2 - y^2 = y - x$, soit $(x-y)(x+y) = y - x$, d'où $(x-y)(x+y+1) = 0$. Comme $x \neq y$, on en déduit que $x + y + 1 = 0$, donc $x + y = -1$. Absurde vu que x et y sont positifs ! leur somme ne saurait être négative. D'où le résultat.

■ Démontrer une équivalence

> ❑ **Méthode 1.7.— Comment démontrer une équivalence par double implication**
> Par définition, l'équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ » est la proposition « $P \Rightarrow Q$ *et* $Q \Rightarrow P$ ». Démontrer par double implication l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, c'est démontrer que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. En pratique, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$ par double implication :
>
> - on démontre $P \Rightarrow Q$;
> - puis on démontre $Q \Rightarrow P$.
>
> Dans ce cas, il y a donc deux démonstrations à faire pour obtenir l'équivalence.

Exemple : on pose $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$. Nous allons prouver cette équivalence en raisonnant par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $m = 0$, f est constante et égale à 1, elle garde donc un signe constant (positif) sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, montrons que, si f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors $m = 0$. Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $m \neq 0$. On a alors :

$$f(x) = m\big(x + \frac{1}{m}\big),$$

et f change de signe en $-\frac{1}{m}$ (du signe de m pour $x > -\frac{1}{m}$, du signe de $-m$ pour $x < -\frac{1}{m}$). Ainsi, si $m \neq 0$, f change de signe sur $\mathbb{R}$.
Nous avons montré les deux implications. Ainsi, f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2 + 1}$.
On va raisonner par double implication.
• Si x est solution de l'équation, alors $(2x)^2 = x^2 + 1$, soit $4x^2 = x^2 + 1$, d'où $3x^2 = 1$. On obtient donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
• Réciproquement, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sont-ils solutions de l'équation ? Si x est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est solution mais $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne l'est pas.
Finalement, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

> ❑ **Méthode 1.8.— Comment démontrer une équivalence par raisonnement direct**
> Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut également enchaîner les équivalences. On passe de P à Q par une succession d'équivalences en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'équivalence est bien conservée.