Chapitre 1

Equations

1.1 Polynômes du second degré

1.1.1 Point de cours

Définition 1 : une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Définition 2 : une fonction polynôme de degré n est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_1 et a_0 sont des réels donnés et $a_n \neq 0$.

Définition 3 : x_0 est une racine du polynôme f si et seulement si $f(x_0) = 0$.

Propriété 1 : pour toute fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, on peut trouver deux réels α et β tels que, pour tout réel x : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
Cette écriture est appelée la **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Propriété 2 : les variations de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont données par les tableaux suivants :

- Si $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

f admet un minimum en $-\dfrac{b}{2a}$

- Si $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

f admet un maximum en $-\dfrac{b}{2a}$

1.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 1 **5 minutes**

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes?

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $f(x) = -\sqrt{2} + x - 3x^2$
3. $f(x) = x^2 + 3\sqrt{x} - 2$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x + 1}$
5. $f(x) = x^3 + 2x - 2019$
6. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x + 9$
7. $f(x) = 3x^2 - 3$
8. $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 19}{15}$

EXERCICE 2 **5 minutes**

Déterminer le degré de chaque fonction polynôme :

1. $f(x) = 3x^5 + x^2 - 3$
2. $f(x) = 1 + 9x + 4x^8$
3. $f(x) = x^2 - 2x^4 + 6x^3$
4. $f(x) = x^3 + 2x - 2$
5. $f(x) = -6x^{201} + 4x^{102} + 8$
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

EXERCICE 3 **5 minutes**

Sans développer les expressions, donner pour chaque polynôme son degré, le coefficient du plus haut degré et le coefficient du degré le plus bas.

1. $f(x) = \left(x^2 + x - 8\right)\left(x^3 - 2x^2 + x + 2\right)$
2. $f(x) = \left(2x^2 + 3x + 4\right)\left(5x^5 + 3x^3 - 7x\right)$
3. $f(x) = \left(x^2 - 2x^4 + 6x^3\right)(2x - 9)$
4. $f(x) = \left(x^3 + 2x - 2\right)\left(-2x^5 + 6x^3 - 7x\right)$
5. $f(x) = \left(-6x^{201} + 4x^{102} + 8\right)\left(x^{28} + 6x^{10} - 9\right)$
6. $f(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 1\right)\left(1 - 3x + 2x^2\right)$

EXERCICE 4 **5 minutes**

Sachant que P, Q et R sont des fonctions polynômes de degrés respectifs 2, 3 et 5. Quel sera le degré des polynômes PQ, PR, QR et PQR?

EXERCICE 5 **5 minutes**

Soit P une fonction polynôme de degré n.
Exprimer, en fonction de n, le degré des polynômes suivants :

1. $\left(x^2 + x + 1\right) \times P(x)$
2. $P^3 = P \times P \times P$
3. P^k avec k un entier naturel non nul.
4. λP avec λ réel non nul.

EXERCICE 6 **5 minutes**

Dans chaque cas, vérifier que x_0 est une racine de la fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $x_0 = 1$
2. $f(x) = 5 + 9x + 4x^8$ et $x_0 = -1$
3. $f(x) = x^2 - 2x^4 + 6x^3$ et $x_0 = 0$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et $x_0 = 2$
5. $f(x) = -6x^{201} + 4x^{102} + 2$ et $x_0 = 1$
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ et $x_0 = 1$

EXERCICE 7 **5 minutes**

Déterminer les racines de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = (x-2)(x+1)$
2. $f(x) = (2x+3)(x+2)$
3. $f(x) = (2-x)(1-3x)$
4. $f(x) = (x-1)(x+1)$
5. $f(x) = (x-2)^2$
6. $f(x) = (x-2)(1-x)(2x+3)$

EXERCICE 8 **10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2+2x-3$
2. $f(x) = x^2+4x+9$
3. $f(x) = x^2-6x-1$
4. $f(x) = x^2-2x-3$
5. $f(x) = x^2-10x+10$
6. $f(x) = x^2+18x+30$

EXERCICE 9 **10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2+x+1$
2. $f(x) = x^2+3x+4$
3. $f(x) = x^2-9x+9$
4. $f(x) = x^2-3x-3$
5. $f(x) = x^2-7x+10$
6. $f(x) = x^2+15x+30$

EXERCICE 10 **10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = 2x^2+4x-3$
2. $f(x) = 3x^2-x+9$
3. $f(x) = -2x^2-6x+3$
4. $f(x) = 5x^2-8x-3$
5. $f(x) = -4x^2-10x+2$
6. $f(x) = -5x^2+12x+3$

EXERCICE 11 **10 minutes**

Etablir le tableau de variations de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2+2x-3$
2. $f(x) = -3x^2+4x+9$
3. $f(x) = 4x^2-6x-1$
4. $f(x) = -5x^2-2x+4$
5. $f(x) = x^2-10x+10$
6. $f(x) = 3x^2+18x+30$

EXERCICE 12 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3-3x^2-4x+5$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = (x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

EXERCICE 13 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3+5x^2-2x-8$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = (x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

EXERCICE 14 **5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3+7x^2+x-2$.
Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

EXERCICE 15 **5 minutes**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.
Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+1)\left(ax^2 + bx + c\right)$.

EXERCICE 16 **5 minutes**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3 - 32x^2 - 6x + 36$.
Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+6)\left(ax^2 + bx + c\right)$.

EXERCICE 17 **5 minutes**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

1. Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x-2)\left(ax^2 + bx + c\right)$.
2. En développant l'expression avec les valeurs de a et c obtenues, déterminer le réel b.
3. En déduire une factorisation complète de f.

EXERCICE 18 **5 minutes**
Dans chaque cas, rechercher une racine « évidente » de la fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + x - 2$
2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$
3. $f(x) = x^2 - x - 2$
4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
5. $f(x) = -6x^2 - 10x + 4$
6. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

1.1.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 19 **10 minutes**
Soit M un point du segment $[AB]$ de longueur 1. On construit deux carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$. Soit x la longueur AM et $\mathcal{A}(x)$ la somme des aires des deux carrés.

1. Déterminer $\mathcal{A}(x)$.
2. Pour quelle position du point M l'aire $\mathcal{A}(x)$ sera-t-elle minimale ?

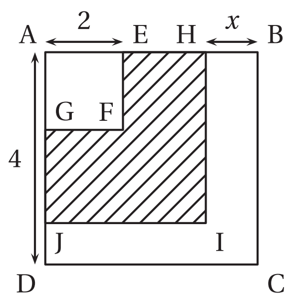
EXERCICE 20 **10 minutes**
Pour surveiller la zone de baignade, un maître-nageur veut délimiter un rectangle le long de la plage, pour cela, il dispose d'un cable de bouées d'une longueur de 150 mètres.
Quelle sera l'aire maximale de la zone ainsi délimitée ?

EXERCICE 21 **10 minutes**
On coupe une ficelle de 1 mètre de longueur pour entourer un carré et un rectangle deux fois plus long que large.
Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des deux aires soit minimale ?

EXERCICE 22 **10 minutes**
Soit $\mathcal{D}$ un disque de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$.
Soit M un point du segment $[AB]$. On construit les disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de diamètres $[AM]$ et $[MB]$.
Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire comprise entre les disques. On pose $AM = x$.

1. Dans quel intervalle I varie x ?
2. Calculer l'aire des disques $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
3. En déduire que $\mathcal{A}(x) = -\dfrac{\pi}{2}x^2 + \pi x$.
4. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$ sur l'intervalle I.
5. En déduire la position du point M pour laquelle $\mathcal{A}$ est maximale. Quelle est alors la valeur de l'aire ?

Exercice 23 **10 minutes**



1. Dans la figure ci-contre AEFG, AHIJ et ABCD sont des carrés. Calculer AH en fonction de x ; en déduire l'aire de AHIJ puis préciser, dans la liste ci-dessous, la (ou les) expression(s) algébrique(s) qui correspond(ent) à l'aire de la partie hachurée.
   $M = (4-x)^2 - 2^2$ $\quad N = (4-x-2)^2$ $\quad P = 4^2 - x^2 - 2^2$
2. Développer et réduire l'expression $Q = (4-x)^2 - 4$.
3. Factoriser Q.
4. Calculer Q pour $x = 2$. Que traduit ce résultat pour la figure ?

Exercice 24 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^2 - (2x-1)(x+5)$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression de f.
2. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
   a. Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(1+\sqrt{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{13}{4}\right)$.
   b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer les racines de f.

Exercice 25 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)^2 + (x+5)(2x-3)$.

1. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
2. Développer, réduire et ordonner l'expression de f.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
   a. Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$ et $f\left(\dfrac{5}{12}\right)$.
   b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer les racines de f.

EXERCICE 26 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 9 + (2x+3)(x-1)$.

1. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
2. Développer, réduire et ordonner l'expression de f.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
   - **a.** Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$ et $f\left(-\frac{1}{12}\right)$.
   - **b.** Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Déterminer les racines de f.

EXERCICE 27 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 16 - x^2 - (x+6)(x+4)$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression de f.
2. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
   - **a.** Calculer $f(0)$, $f(-4)$, $f\left(3\sqrt{2}\right)$ et $f\left(-\frac{5}{2}\right)$.
   - **b.** Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Déterminer les racines de f.

EXERCICE 28 : DÉMONSTRATION **10 minutes**

Etablir la forme canonique du trinôme de forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$.

EXERCICE 29 **5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines 1 et 2.
Sachant de plus que $f(0) = 2$, déterminer la forme développée de la fonction f.

EXERCICE 30 **5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines -3 et 4.
Sachant de plus que $f(0) = -2$, déterminer la forme développée de la fonction f.

EXERCICE 31 **5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines -2 et 2.
Sachant de plus que $f(0) = 8$, déterminer la forme développée de la fonction f.

EXERCICE 32 **20 minutes**

Démontrer que la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 5x^2 - 7x + 26$ est divisible par $x - 2$.
En déduire une factorisation de $f(x)$.

EXERCICE 33 **10 minutes**

Démontrer que la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 8x^2 + 25x - 26$ est divisible par $x - 2$.

En déduire une factorisation de $f(x)$.

Exercice 34 **15 minutes**

Soit la fonction polynôme $P(x) = x^4 - 8x^3 - 50x^2 + 264x + 945$.

1. Calculer $P(-5)$, $P(-3)$, $P(7)$.
2. En déduire une factorisation de P sous forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.
3. En déduire la quatrième racine du polynôme P.

Exercice 35 **15 minutes**

Soit la fonction polynôme $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 21x^2 + 2x + 24$.

1. Calculer $P(-4)$, $P(-1)$, $P(2)$.
2. En déduire une factorisation de P sous forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.
3. En déduire la quatrième racine du polynôme P.

Exercice 36 **10 minutes**

Déterminer le coefficient a pour que la fonction polynôme $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$ soit divisible par $x - 2$.

Exercice 37 **15 minutes**

Soit la fonction polynôme $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 9$. Montrer que l'on peut déterminer quatre entiers relatifs a, b, c et d tels que $f(x) = (x + b)\left(x^2 + cx + d\right)$.

Exercice 38 **10 minutes**

Montrer que quels que soient les réels p et q, le polynôme $P(x) = x^3 + (p-q)x^2 + p(p-q)x - p^2q$ est divisible par $x - q$.
Factoriser le polynôme P.

Exercice 39 **10 minutes**

1. Développer, réduire et ordonner $\left(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1\right)\left(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1\right)$.
2. Le nombre $N = 10\,001\,000\,100\,010\,001$ est-il premier ?

Exercice 40 **15 minutes**

Soit la fonction polynôme $f(x) = x^4 + 1$.

1. La fonction f admet-elle des racines réelles ?
2. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \left(x^2 + ax + 1\right)\left(x^2 + bx + 1\right)$.
3. En remarquant que $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$, grâce à deux factorisations successives retrouver la factorisation de la question précédente.

Exercice 41 **10 minutes**

En s'inspirant de l'exercice précédent, décomposer en produit de deux facteurs de degré 2 le polynôme $P(x) = x^4 + 4$.

EXERCICE 42 **15 minutes**

Soit la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6(x-a)(x-b)+3a(x-b)+2b(x-a)$, avec a et b deux réels positifs distincts.

1. Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(0)$.
2. Montrer, sans développer $f(x)$, que le polynôme $f(x)$ admet deux racines et qu'elles sont toutes deux positives.

EXERCICE 43 **15 minutes**

Soit $P_n(x) = x^n - 1$ avec $n \geqslant 2$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)$.
2. Vérifier que 1 est une racine du polynôme P_n.
3. Déduire des questions précédentes une factorisation de P_n.
4. Factoriser $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

EXERCICE 44 **15 minutes**

Soit $P_n(x) = x^n - 1$ avec $n \geqslant 2$. Soient a et b deux réels non nuls.

1. Calculer $P_n\left(\dfrac{a}{b}\right)$
2. En utilisant la question précédente et le résultat de l'exercice précédent, démontrer l'identité : $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.
3. En déduire une factorisation des expressions suivantes :
   - **a.** a^2-b^2
   - **b.** a^3-b^3
   - **c.** a^4-b^4
   - **d.** x^3-27

EXERCICE 45 **15 minutes**

Soit P une fonction polynôme de degré $n > 0$. Soit Q une fonction polynôme définie par $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

1. Expliciter Q lorsque $P(x) = x^2$.
2. Expliciter Q lorsque $P(x) = x^3$.
3. Quel est le degré de Q lorsque P est de degré n?
4. Soit P un polynôme périodique, de période 1, en raisonnant par l'absurde sur le degré de P et en considérant Q, montrer que P est une fonction constante.

☞ Un polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ est périodique, de période T, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+T) = P(x)$.