Chapitre 1

# Nombres complexes (partie 1)

On doit à **Gauss** (1777-1855) une définition des nombres complexes. La notation $z = a + ib$ avec $i^2 = -1$ est due à **Euler** (1707-1783).

Les nombres complexes sont nés d'un problème algébrique : la résolution de l'équation de degré 3.

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XVI$^e$ siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre de **Cardan** (1501-1576), d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle "sophistiqué".

C'est **Bombelli** (1526-1572) qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors "impossibles" avant de leur donner le nom "d'imaginaires".

**Les contenus du chapitre**

▷ Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations.
▷ Conjugaison. Propriétés algébriques.
▷ Inverse d'un nombre complexe non nul.
▷ Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.

**Les capacités attendues du chapitre**

▷ Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.
▷ Résoudre une équation linéaire $az = b$.
▷ Résoudre une équation simple faisant intervenir $z$ et $\overline{z}$.

# Cours complet

## 1. Définition et notation

**Définition 1 – Ensemble des nombres complexes**

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme $z = a + bi$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $i$ est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \text{ tel que } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

On dira que $a + ib$ est **l'écriture algébrique** du nombre complexe $z$.
En sciences physiques, on note $j$ à la place de $i$ car $i$ représente l'intensité du courant.

**Exemples :**
▷ $z = 2 + 3i$
▷ $z = 3 - i$
▷ $z = i$
▷ $z = 2$

**Propriété 1 – $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$**

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Tout nombre réel est un nombre complexe.

**Démonstration**

Si $x \in \mathbb{R}$ alors $x = x + 0 \times i$ donc $x \in \mathbb{C}$.

⚠ Il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$. On ne peut pas ordonner les nombres complexes avec les relations $<$, $>$, $\leq$ et $\geq$.

**Définition 2 – Partie réelle et partie imaginaire**

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$

▷ $a$ se nomme **la partie réelle** de $z$ et se note $\mathrm{Re}(z)$.
▷ $b$ se nomme **la partie imaginaire** de $z$ et se note $\mathrm{Im}(z)$.

**Exemples :**
▷ Dans $z = 3 - 4i$, $\mathrm{Re}(z) = 3$ et $\mathrm{Im}(z) = -4$.
▷ Dans $z = 5$, $\mathrm{Re}(z) = 5$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.

▷ Dans $z = 7i$, $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 7$.

**Définition 3 – Imaginaire pur et réel**

Soit $z \in \mathbb{C}$

▷ On dit que $z$ est **un imaginaire pur** si $\mathrm{Re}(z) = 0$.
▷ On dit que $z$ est **un réel** si $\mathrm{Im}(z) = 0$

**Exemples :**
▷ $z = 3i$ est un imaginaire pur.
▷ $z = 3$ est un réel.

**Définition 4 – Ensemble des imaginaires purs**

On note $i\mathbb{R}$ **l'ensemble des imaginaires purs**.

$$i\mathbb{R} = \{z = ia \text{ où } a \in \mathbb{R}\}$$

**Définition 5 – Complexe conjugué**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On nomme **conjugué de** $\boldsymbol{z}$ et on note $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Exemples :
▷ Si $z = 2 + 3i$ alors $\overline{z} = 2 - 3i$.
▷ Si $z = 2 - 3i$ alors $\overline{z} = 2 + 3i$.
▷ Si $z = 3i$ alors $\overline{z} = -3i$.
▷ Si $z = 2$ alors $\overline{z} = 2$.

**Propriété 2 – Conjugué d'un réel**

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

**Démonstration**

$\Rightarrow$
Si $z \in \mathbb{R}$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = a + i \times 0$.
On a donc $\overline{z} = a - i \times 0 = a = z$.

$\Leftarrow$
Si $\overline{z} = z$ alors $\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$
On a donc $2i\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ donc $z \in \mathbb{R}$.

**Propriété 3 – Conjugué d'un imaginaire pur**

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow -z = \overline{z}$$

**Démonstration**

$\Rightarrow$
Si $z \in i\mathbb{R}$ alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $z = 0 + ib$.
On a donc $\overline{z} = 0 - ib = -ib = -z$.

$\Leftarrow$
Si $\overline{z} = -z$ alors $\text{Re}(z) - i\text{Im}(z) = -\text{Re}(z) - i\text{Im}(z)$.
On a donc $2\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}[z) = 0$ donc $z \in i\mathbb{R}$.

## 2. Opérations dans $\mathbb{C}$

On note $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où $a, a', b, b'$ sont des réels.

**Propriété 4 – Somme de deux complexes**

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

donc

$$\begin{cases} \text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z') \end{cases}$$

**Démonstration**

$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$

**Exemples :**
▷ $z = 3 + 4i$ et $z' = -5 + 3i$ alors $z + z' = -2 + 7i$.
▷ $z = 3 + 4i$ et $z' = -2i$ alors $z + z' = 3 + 2i$.

**Propriété 5 – Conjugué d'une somme**

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués.

**Démonstration**

On note $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où $a, a', b, b'$ sont des réels.
$z + z' = (a + a') + i(b + b')$

$$\overline{z+z'} = (a+a') - i(b+b') = a + a' - ib - ib' = (a - ib) + (a' - ib') = \overline{z} + \overline{z'}$$

**Propriété 6 – Différence de deux complexes**

$$z - z' = (a - a') + i(b - b')$$

ou

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z - z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z - z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

**Démonstration**

$$z - z' = (a + ib) - (a' + ib') = a + ib - a' - ib' = (a - a') + i(b - b')$$

**Exemples :**

▷ $z = 3 + 4i$ et $z' = -5 + 3i$ alors $z - z' = 8 + i$

▷ $z = 3 + 4i$ et $z' = -2i$ alors $z - z' = 3 + 6i$

**Propriété 7 – Conjugué d'une différence**

$$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

Le conjugué d'une différence est la différence des conjugués.

**Démonstration**

On note $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où $a, a', b, b'$ sont des réels.

$z - z' = (a - a') + i(b - b')$

$$\overline{z - z'} = (a - a') - i(b - b') = a - a' - ib + ib' = (a - ib) - (a' - ib') = \overline{z} - \overline{z'}$$

**Propriété 8 – Produit de deux complexes**

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

ou

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z \times z') = \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Im}(z') \\ \mathrm{Im}(z \times z') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z') \end{cases}$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2 bb' = aa' + iab' + iba' - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

**Exemples :**
▷ $z = 3+4i$ et $z' = -5+3i$ alors $z \times z' = -15+9i-20i-12 = -27-11i$
▷ $z = 3+4i$ et $z' = 3-4i$ alors $z \times z' = 3^2-(4i)^2 = 9-(-16) = 9+16 = 25$

**Propriété 9 – Produit par son conjugué**

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2$$

ou

$$z \times \overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$$

**Démonstration**

$$z \times \overline{z} = (a+ib) \times (a-ib) = aa + -iab + iba - i^2 bb = aa - (-bb) = a^2 + b^2$$

**Exemples :**
▷ $z = 3+4i$ alors $z \times \overline{z} = 3^2+4^2 = 9+16 = 25$
▷ $z = 1+i$ alors $z \times \overline{z} = 1^2+1^2 = 2$

**Propriété 10 – Conjugué d'un produit**

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.

**Démonstration**

On note $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ où $a, a', b, b'$ sont des réels.
$z \times z' = (aa'-bb') + i(ab'+ba')$

$\overline{z \times z'} = (aa'-bb') - i(ab'+ba')$

$\overline{z} \times \overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = aa' - iab' - iba' - bb' = (aa'-bb') - i(ab'+ba')$
donc

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

**Propriété 11 – Inverse d'un nombre complexe**

Si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{z\overline{z}}\right) - i\left(\frac{b}{z\overline{z}}\right)$$

ou

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{z\overline{z}}\right) - i\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{z\overline{z}}\right)$$

**Démonstration**

Si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1 \times (a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{z\overline{z}} - i \times \frac{b}{z\overline{z}}$$

**Exemples :**

▷ $z = 3+4i$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{25} - i \times \dfrac{4}{25} = \dfrac{1}{25}(3-4i)$

▷ $z = 1-i$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} + i \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(1+i)$

**Propriété 12 – Conjugué d'un inverse**

Si $z \neq 0$,

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Le conjugué d'un inverse est l'inverse du conjugué.

**Démonstration**

On note $z = a+ib$ avec $z \neq 0$.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

**Propriété 13 – Conjugué d'une puissance entière**

Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$$

Le conjugué d'une puissance entière est la puissance entière du conjugué.

**Démonstration**

▷ On note $n \in \mathbb{N}$ et $z = a+ib$ où $a$ et $b$ sont des réels.
On va démontrer cette propriété par récurrence :
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.
**Initialisation** : (Pour $n = 0$)
$\overline{(z^0)} = \overline{1} = 1$ et $\overline{z}^0 = 1$
donc $\mathbf{P}_0$ est vraie.
**Hérédité** : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang $k$, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.