Valentina Lanza
David Manceau

Mathématiques

Mise à niveau pour entrer dans une licence scientifique

Cours et exercices corrigés

ellipses

CHAPITRE 1

Rappels sur le calcul numérique

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base du calcul numérique : les priorités de calcul, les notions de développement et de factorisation, ainsi que le calcul littéral, les fractions et les puissances.

Sommaire

1 Nombres entiers et priorités de calcul

Rappelons tout d'abord la définition des nombres entiers.

Définition : *Nombres entiers*

- ▷ Les nombres **entiers naturels** sont les nombres

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

- ▷ Les nombres **entiers relatifs** (ou simplement **entiers**) sont les nombres

$$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

On liste ci-après quelques propriétés du calcul avec les nombres entiers que l'on utilise généralement de façon intuitive.

PROPRIÉTÉS : *Associativité et commutativité*

- *L'addition et la multiplication d'entiers sont* ***associatives** :*

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad et \qquad (a\times b)\times c = a\times(b\times c)$$

pour tous entiers a, b et c.

- *L'addition et la multiplication d'entiers sont* ***commutatives** :*

$$a+b = b+a \qquad et \qquad a\times b = b\times a$$

pour tous entiers a et b.

L'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication impliquent qu'en effectuant *uniquement* des additions ou *uniquement* des multiplications, ces opérations peuvent être faites dans n'importe quel ordre :

$$4\times3\times5 = 4\times5\times3 = 3\times4\times5 = 3\times5\times4 = 5\times3\times4 = 5\times4\times3$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on peut commencer par la multiplication qui nous semble la plus simple (par exemple $3\times5 = 15$) puis effectuer ensuite la multiplication restante :

$$\underbrace{3\times5}_{=15}\times4 = 15\times4 = 60$$

PROPRIÉTÉS : *Éléments neutres et opposé*

- *L'addition possède un* ***élément neutre**, le nombre 0, c'est-à-dire*

$$a+0 = 0+a = a$$

pour tout entier a.

- *La multiplication possède un élément neutre, le nombre 1, c'est-à-dire*

$$a\times1 = 1\times a = a$$

pour tout entier a.

- *Tout entier a possède un* ***opposé**, noté $-a$, qui vérifie*

$$a+(-a) = (-a)+a = 0$$

L'existence d'un opposé pour tout entier permet de définir la soustraction de deux entiers. Autrement dit, étant donnés deux entiers a et b, la **soustraction** de a

par b est définie par

$$a - b = a + (-b)$$

Ce qui signifie que soustraire un nombre c'est additionner son opposé. La soustraction vérifie les propriétés ci-dessous :

Propriétés : *Propriétés de la soustraction et de l'opposé*

Soient a et b deux entiers.

- ▷ $a - b = a + (-b) = -(-a + b) = -(b - a)$
- ▷ $a - (-b) = a + b$
- ▷ $a \times (-b) = -(a \times b) = (-a) \times b$
- ▷ $(-a) \times (-b) = a \times b$
- ▷ $-(-a) = a$

Exemples

Reprenons chacune des propriétés avec $a = 3$ et $b = 5$.

- ▷ $3 - 5 = -2 = -\underbrace{(-3 + 5)}_{=2} = -\underbrace{(5 - 3)}_{=2}$
- ▷ $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$
- ▷ $3 \times (-5) = -15 = -\underbrace{(3 \times 5)}_{=15} = (-3) \times 5$
- ▷ $(-3) \times (-5) = 3 \times 5 = 15$
- ▷ $-(-5) = (-5) \times (-1) = 5 \times 1 = 5$

Remarque

Nous n'avons pas encore parlé de la division, notée $\div$, et de ses propriétés. Celle-ci sera étudiée plus spécifiquement dans la section 3 consacrée aux fractions.

Lorsqu'un calcul comporte un mélange d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et des parenthèses, il est nécessaire de savoir dans quel ordre effectuer toutes ces opérations. Pour cela, il existe des règles précises données ci-après.

Propriétés : *Règles de priorité*

Les calculs s'effectuent de gauche à droite dans l'ordre suivant :

1) *en premier les parenthèses,*

2) *puis les multiplications et les divisions,*

3) *enfin, les additions et les soustractions.*

Exemples

▷ Calcul avec une multiplication et une addition.

$$23 + \underbrace{7 \times 5}_{=35} = 23 + 35 = 58$$

▷ Calcul avec une multiplication, une addition et des parenthèses.

$$\underbrace{(23 + 7)}_{=30} \times 5 = 30 \times 5 = 150$$

Remarquons que l'ajout de parenthèses par rapport à l'exemple précédent a modifié l'ordre des opérations, et donc le résultat.

▷ Calcul (plus compliqué) avec une multiplication, une addition et des parenthèses.

$$12 \times \underbrace{(8 - 3)}_{=5} + 15 = \underbrace{12 \times 5}_{=60} + 15 = 60 + 15 = 75$$

▷ Calcul comprenant une division.

$$\underbrace{8 \div 2}_{=4} + 3 \times \underbrace{(4 - 5)}_{=-1} = 4 + 3 \times (-1) = 4 - 3 = 1$$

▷ Calcul avec utilisation de la règle $-(-a) = a$.

$$15 - \underbrace{(14 - 27)}_{=-13} + 7 \times 3 = 15 - (-13) + \underbrace{7 \times 3}_{=21} = 15 \underbrace{-(-13)}_{=13} + 21$$

$$= 15 + 13 + 21 = 28 + 21 = 49$$

Exercice 1.1

Effectuer les calculs ci dessous :

1) $2 - 3 \times 4$

2) $3 - 4 + 4 \times 1$

3) $(5 \times 5) + 0 - (2 - 4) + 3$

4) $24 + (12 \div 6) \times 3$

2 Développement et factorisation

Dans cette section, on introduit le calcul littéral, c'est-à-dire avec des lettres. On y présente les notions de *développement* et de *factorisation*, ainsi que les trois *identités remarquables*.

Propriétés : *Développements de produits*

La multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction. Autrement dit, pour tous entiers a, b et k, on a les relations suivantes :

- ▷ $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
- ▷ $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$
- ▷ $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Remarque

Lorsque l'on travaille avec des lettres, en général on n'écrit pas le symbole $\times$. Ainsi, on écrit plutôt les formules précédentes sous la forme

- ▷ $k(a + b) = ka + kb$
- ▷ $k(a - b) = ka - kb$
- ▷ $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemples

Soient x et y deux entiers. Alors,

- ▷ $2(x + 8) - (x + 6) = 2x + 16 - x - 6 = x + 10$
- ▷ $(x - 3)(y - 1) = xy - x - 3y + 3$

La **factorisation** d'une expression mathématique est la démarche inverse de celle du développement. Autrement dit, la factorisation consiste à écrire une expression mathématiques en mettant en avant un facteur commun. Pour cela, on utilise les formules vues précédemment mais dans le sens inverse.

PROPRIÉTÉS : *Factorisation de produits*

Pour tous entiers a, b et k, on a les relations suivantes :

- ▷ $ka + kb = k(a + b)$
- ▷ $ka - kb = k(a - b)$
- ▷ $ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$

EXERCICE 1.2

Soient x et y deux entiers. Développer et simplifier (réduire à la forme la plus simple possible) les expressions ci-dessous :

1) $(4 - x) + (2 \times x)$ **2)** $4 - (x \times 2y) + 5$

3) $4x - (3 \times 2y + 5) - 2x \times 5y$ **4)** $(1 - x) \times (5 + y)$

5) $1 + (y \times 5x) - 2xy$ **6)** $(3 + 2x)(4 + y - 5(2 - y))$

Lorsque l'on multiplie un entier par lui même (on effectue $a \times a$), on utilise l'écriture simplifiée suivante :

DÉFINITION : *Carré d'un entier*

Le **carré** d'un entier a est l'entier donné par $a \times a$ et s'écrit a^2. Ainsi,

$$a^2 = a \times a$$

EXEMPLES

Les 9 premiers carrés d'entiers (utiles à connaître)

1) $1^2 = 1$ **2)** $2^2 = 4$ **3)** $3^2 = 9$

4) $4^2 = 16$ **5)** $5^2 = 25$ **6)** $6^2 = 36$

7) $7^2 = 49$ **8)** $8^2 = 64$ **9)** $9^2 = 81$

De plus, on retiendra le cas du carré de zéro : $0^2 = 0$.

Remarque : *Carré d'un entier négatif*

Pour tout entier a, on a

$$(-a)^2 = (-a) \times (-a) = a \times a = a^2$$

On en déduit que le carré est toujours positif et que le carré de a et de $-a$ sont les mêmes.

Propriétés : *Identités remarquables*

Les règles de distributivité entraînent, entre autres, pour tous entiers a et b, les formules suivantes :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Démonstration. Afin de mieux retenir ces formules il est utile de savoir les redémontrer. Celles-ci s'obtiennent très simplement.

- D'après les règles de distributivité, on a

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Partant de l'égalité, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en remplaçant b par $-b$ on obtient

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + (-b)(-b) = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

- D'après les règles de distributivité, on a

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Ainsi, on a bien montré les trois égalités. □

Exemples

Soit x un entier.

- En utilisant la deuxième identité (avec $a = x$ et $b = 5$), on obtient

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

▷ En utilisant la troisième identité (avec $a = x$ et $b = 2$), on obtient

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$$

Exercice 1.3

Soit x un entier. Développer et réduire les expressions ci-dessous :

1) $(5x+5)^2$

2) $(4x+10)(4x-10)$

3) $(10x-8)^2 + (4x+8)^2$

4) $(5x-3)^2 - (2x+1)(5x-3)$

Remarque

Comme dit précédemment, la factorisation est l'opération inverse du développement. Les identités remarquables données plus haut sont écrites sous la forme d'un développement. Sous une forme factorisée celles-ci sont données par

▷ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

▷ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$,

▷ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exemple

Soit x un entier. On souhaite factoriser $x^2 - 1$. On remarque que l'on a $1 = 1^2$, ainsi en utilisant la dernière identité remarquable, on obtient

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$$

Exercice 1.4

Factoriser les expressions suivantes :

1) $x^2 - 4$

2) $14x + 49x^2 + 1$

3) $x^2 - 4x$

4) $(5x-3)^2 - (2x+1)(5x-3)$

5) $(2x+\pi)(-3x+1) - (2x+\pi)(x-5)$

6) $x^2 - 4x + 4$