2de

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SON ANNÉE

ellipses

Chapitre 1

Nombres et calculs

1.1 Nombres entiers

1.1.1 Point de cours

Définitions et notations

- L'ensemble des nombres **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un entier positif : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$.
- L'ensemble des nombres **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un entier : $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$.

Remarque : tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, ce qui se note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Définition : Soient a et b deux entiers. S'il existe un nombre entier p tel que $a = b \times p$, on dit que :

- b divise a ou que b est un diviseur de a;
- ou que a est un multiple de b ou que a est divisible par b.

Critères de divisibilité :

- Un nombre est divisible par 2 lorsque le chiffre des unités est 0; 2; 4; 6 ou 8.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 4 lorsque les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
- Un nombre est divisible par 5 lorsque le chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 8 lorsque les trois derniers chiffres forment un multiple de 8.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre est divisible par 10 lorsque le chiffre des unités est 0.

Définition et propriété : soit n un nombre entier.
• Un **nombre pair** est un entier multiple de 2. Ainsi, n est pair si et seulement s'il existe un

entier p tel que $n = 2 \times p$.
• Un **nombre impair** est un entier **non** multiple de 2. Ainsi, n est impair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2 \times p + 1$.

Définition : un **nombre premier** est un entier naturel possédant exactement deux diviseurs distincts dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Propriété : tout entier naturel, non premier et supérieur à 2, peut s'écrire comme produit de nombres premiers.

1.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 1 **5 minutes**
Placer les entiers relatifs suivants sur la droite numérique : 2, −3, 7, −1, −5, 5 et 4.

EXERCICE 2 **5 minutes**
On sait que $193 = 15 \times 12 + 13$.
Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 193 par 15, puis de la division euclidienne de 193 par 12.

EXERCICE 3 **5 minutes**
On sait que $2021 = 20 \times 99 + 41$.
Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 2021 par 99, puis de la division euclidienne de 2021 par 20.

EXERCICE 4 **5 minutes**
Parmi les nombres 12 ; 25 ; 36 ; 45 ; 98 ; 111 ; 285 ; 2021 ; 4238 ; 6391 et 9136, indiquer ceux qui sont divisibles par :
1. par 2 **2.** par 3 **3.** par 5 **4.** par 6 **5.** par 9

EXERCICE 5 **5 minutes**
Parmi les nombres 36 ; 161 ; 396 ; 495 ; 1818 ; 9876 ; 2835 ; 3456 ; 3795 ; 9192 et 89000, indiquer ceux qui sont divisibles par :
1. par 2 **2.** par 3 **3.** par 5 **4.** par 9 **5.** par 18

EXERCICE 6 **5 minutes**
Parmi les nombres suivants, quels sont les multiples de 5, les multiples de 13 et les multiples de 6 ?
10 ; 39 ; 60 ; 65 ; 69 ; 234 ; 330 ; 390.

EXERCICE 7 **5 minutes**

Parmi les nombres suivants, quels sont les multiples de 4, les multiples de 12 et les multiples de 17 ?

34 ; 36 ; 42 ; 65 ; 68 ; 340 ; 510 ; 4692.

EXERCICE 8 **5 minutes**

Parmi les nombres suivants, quels sont les nombres premiers ? Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres non premiers.

57 ; 67 ; 77 ; 101 ; 373 ; 1323 ; 1001 ; 3223 ; 4597.

EXERCICE 9 **5 minutes**

Parmi les nombres suivants, quels sont les nombres premiers ? Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres non premiers.

97 ; 99 ; 103 ; 123 ; 231 ; 567 ; 773 ; 1657.

EXERCICE 10 **5 minutes**

On considère les entiers $a = 35$ et $b = 45$.

1. Donner un multiple de a et un multiple de b.
2. Donner un entier multiple simultanément de a et b, c'est un multiple commun à a et b.
3. Donner le plus petit multiple commun à a et b.

EXERCICE 11 **5 minutes**

On considère les entiers $a = 42$ et $b = 63$.

1. Donner un multiple de a et un multiple de b.
2. Donner un entier multiple simultanément de a et b, c'est un multiple commun à a et b.
3. Donner le plus petit multiple commun à a et b.

EXERCICE 12 **5 minutes**

1. Donner la forme d'un entier multiple de 5.
2. Donner la forme d'un entier multiple de 13.
3. Soit a un entier naturel. Donner la forme d'un entier multiple de a.

EXERCICE 13 **10 minutes**

Dans chaque cas, donner tous les diviseurs des entiers a et b, puis tous les diviseurs communs à a et b. En déduire le plus petit diviseur commun à a et b.

1. $a = 15$ et $b = 35$
2. $a = 30$ et $b = 50$
3. $a = 120$ et $b = 40$
4. $a = 39$ et $b = 16$
5. $a = 154$ et $b = 99$
6. $a = 380$ et $b = 171$

EXERCICE 14 **10 minutes**

Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants : 64, 162, 250, 1000 et 3630.

1.1.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 15 **10 minutes**

Soit a un entier naturel. Démontrer que la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

EXERCICE 16 **10 minutes**

Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

EXERCICE 17 **5 minutes**

Soient $a = 14k$ et $b = 18k$ avec k entier.

1. Démontrer que a est un multiple de 2.
2. Démontrer que b est un multiple de 9.
3. 16 est-il un diviseur de $a + b$?

EXERCICE 18 **5 minutes**

Démontrer que le carré d'un nombre pair est divisible par 4.

EXERCICE 19 **10 minutes**

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que si n est pair alors $n(n+1)$ est pair.
2. Démontrer que si n est impair alors $n(n+1)$ est pair.
3. Que peut-on en conclure sur le produit de deux entiers consécutifs ?

EXERCICE 20 **10 minutes**

Démontrer que si n est un entier naturel impair supérieur ou égal à 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

EXERCICE 21 **10 minutes**

Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

EXERCICE 22 **10 minutes**

Tom dispose de 75 plaques carrées. Il veut les disposer de manière à former un rectangle.

1. Quelles sont les dimensions possibles de ce rectangle ?
2. Quel est le rectangle de plus grand périmètre ?

EXERCICE 23 **10 minutes**

Lors d'un tournoi de foot, 45 filles et 60 garçons sont inscrits. L'organisateur veut constituer un maximum d'équipes mixtes contenant toutes le même nombre de garçons et le même nombre

de filles.
Combien d'équipes peut-il constituer ?

Exercice 24 **10 minutes**

Emma et Arthur ont acheté pour leur mariage 3 003 dragées au chocolat et 3 731 dragées aux amandes.

1. Arthur propose de répartir ces dragées de façon identique dans 20 corbeilles.
   Chaque corbeille doit avoir la même composition. Combien lui reste-t-il de dragées non utilisées ?
2. Emma et Arthur changent d'avis et décident de proposer des petits ballotins* dont la composition est identique. Ils souhaitent qu'il ne leur reste pas de dragées.
   a. Emma propose d'en faire 90. Ceci convient-il ? Justifier.
   b. Ils se mettent d'accord pour faire un maximum de ballotins.
      Combien en feront-ils et quelle sera leur composition ?

** Un ballotin est un emballage pour confiseries, une boîte par exemple.*

Exercice 25 **10 minutes**

Un enfant range ses billes par rangées de 6, il lui en reste 3. Il les range ensuite par rangées de 5, il n'en reste pas.

1. Si l'enfant place ses billes par rangées de 3, va-t-il lui en rester ?
2. Quel est le nombre de billes que possède l'enfant, sachant que ce nombre est inférieur à 30 ?

Exercice 26 **10 minutes**

Quatre affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune, indiquer si elle est vraie ou fausse en argumentant la réponse.
Affirmation 1 : le PGCD de 52 et 39 est 13.
Affirmation 2 : 72 a exactement cinq diviseurs.
Affirmation 3 : si n est un entier, $(n-1)(n+1)+1$ est toujours égal au carré d'un entier.
Affirmation 4 : deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 27 **10 minutes**

L'entreprise « Punu Pua Toro » vend des boîtes de corned-beef. Ces dernières sont de forme cylindrique de 12 cm de diamètre et de 5 cm de hauteur. Elles sont rangées dans un carton de 84 cm de long, 60 cm de large et 5 cm de hauteur de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres.

1. Combien de boîtes peut-on ranger au maximum dans un carton ?
2. Calculer le PGCD de 84 et 60.
3. L'entreprise peut-elle ranger dans ce carton des boîtes cylindriques de plus grand diamètre de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres ? Justifier la réponse.

Exercice 28 **10 minutes**

1. Déterminer le PGCD de 186 et 155 .

2. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats.Les colis sont constitués ainsi :

- Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
- Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
- Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

a. Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?
b. Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?

EXERCICE 29 **10 minutes**

Un chocolatier dispose de 1 575 bonbons au chocolat blanc et de 4 410 bonbons au chocolat noir.
Afin de préparer les fêtes de fin d'année, il veut répartir ses chocolats dans des boîtes de la manière suivante :

- tous les chocolats doivent être utilisés
- toutes les boîtes doivent avoir la même composition.

De plus il veut réaliser le plus grand nombre de boîtes possible.

1. Combien pourra-t-il faire de boîtes ? Justifier votre réponse.
2. Dans chaque boîte, combien y aura-t-il de chocolats blancs et de chocolats noirs ? Justifier.

1.2 Nombres décimaux - Nombres rationnels

1.2.1 Point de cours

Définition 1 : pour tout entier naturel n, non nul, pour tout entier relatif a,
$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Et, si a est non nul, $a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.

Par convention, $a^0 = 1$.

Propriété : soient n et m deux entiers relatifs, a et b deux nombres.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$

Définition 2 :
• L'ensemble des nombres **décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^k}$, où a est un entier relatif et k un entier naturel.

• L'ensemble des nombres **rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul.

Remarque : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Propriété : tout rationnel R a une **forme irréductible** unique, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier relatif p et un unique entier naturel q non nuls tels que $R = \dfrac{p}{q}$ et tels que le seul diviseur positif commun à p et q soit 1.

1.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 30 **5 minutes**

Compléter les égalités suivantes :

1. $10^6 \times 10^5 = 10^?$
2. $10^3 \times 10^5 \times 10^? = 10^4$
3. $\dfrac{13^2 \times 5}{3 \times 7} = 3^? \times 5^? \times 7^? \times 13^?$
4. $\left(\dfrac{11^4 \times 3^2}{2^3 \times 5}\right)^3 = 2^? \times 3^? \times 5^? \times 11^?$
5. $3^6 \times (2 \times 3)^5 = 2^? \times 3^?$
6. $4^3 \times 7^5 \times 2^7 = 2^? \times 7^?$
7. $\dfrac{3^2 \times 15^3}{2^4 \times 7^3} = 2^? \times 3^? \times 5^? \times 7^?$
8. $\left(\dfrac{13^2 \times 5^4}{2^7 \times 5^8}\right)^3 = 2^? \times 5^? \times 13^?$

EXERCICE 31 **5 minutes**

1. Quelle est l'écriture décimale du nombre $A = \dfrac{10^5 + 1}{10^5}$?
2. Antoine utilise sa calculatrice pour calculer le nombre A. Le résultat affiché est 1. Antoine pense que ce résultat n'est pas exact. A-t-il raison ?

EXERCICE 32 **10 minutes**

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 7 476 puis de 6 300.
2. En déduire, sans calculatrice, la forme irréductible de $A = \dfrac{7\,476}{6\,300}$.

EXERCICE 33 **10 minutes**

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 448 035 puis de 1 131 690.
2. En déduire, sans calculatrice, la forme irréductible de $A = \dfrac{448\,035}{1\,131\,690}$.

EXERCICE 34 **5 minutes**

Ecrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de puissances de 2 et de 5.

1. $A = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$
2. $B = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$
3. $C = 625 \times 512$
4. $D = \dfrac{25}{16}$

EXERCICE 35 **10 minutes**

Dans chaque cas, décomposer en produit de facteurs premiers le numérateur et le dénominateur puis simplifier au maximum la fraction.

1. $\dfrac{40}{15}$ **3.** $\dfrac{56}{63}$ **5.** $\dfrac{180}{108}$ **7.** $\dfrac{204}{595}$

2. $\dfrac{48}{56}$ **4.** $\dfrac{63}{48}$ **6.** $\dfrac{650}{800}$ **8.** $\dfrac{2\,261}{323}$

EXERCICE 36 **10 minutes**

Ecrire sous la forme a^n où a et n sont des entiers relatifs.

1. $5^3 \times 5^6 \times 5^{-15}$

2. $-2 \times (-2)^{-3} \times (-2)^5$

3. $2,5^{-3} \times 4,4^{-3}$

4. $\dfrac{7^8}{2^8} \times \left(5,6^{-4}\right)^{-2}$

5. $\dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

6. $\dfrac{60 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{30 \times 10^2 \times 24 \times 10^{-5}}$

7. $\dfrac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times \left(10^{-3}\right)^4}{0,2 \times 10^{-7} \times 18}$

EXERCICE 37 **5 minutes**

1. Déterminer le PGCD de 238 et 170 par la méthode de votre choix.

2. En déduire la forme irréductible de la fraction $\dfrac{170}{238}$.

EXERCICE 38 **5 minutes**

Donner l'écriture décimale, puis l'écriture scientifique des nombres suivants :

1. $A = \dfrac{4 \times 10^{-3}}{5 \times 10^2}$ **2.** $B = \dfrac{3 \times 10^5 \times 4 \times \left(10^{-3}\right)^2}{16 \times 10^{-4}}$ **3.** $C = \dfrac{25 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^2}$

EXERCICE 39 **5 minutes**

1. Calculer le nombre A ci-dessous et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\mathrm{A} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{17}{9} - \frac{1}{3}}.$$

2. Donner l'écriture scientifique de B :

$$\mathrm{B} = \frac{81 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-10}}{18 \times 10^{-2}}.$$

EXERCICE 40 **5 minutes**

1. Soit le nombre $\mathrm{A} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{5} \times \dfrac{10}{4}$.

Calculer A. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible, puis on donnera sa valeur décimale.