1re

SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

Pour ceux
qui ont besoin d'être rassurés

Jean-Louis FROT

ellipses

Chapitre 2

Polynômes

2.1 Forme réduite et identification

On sait qu'un polynôme est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est somme d'un nombre fini de monômes. Réduire un polynôme, c'est regrouper tous ses monômes de même degré en un seul en appliquant autant de fois qu'il est possible la règle suivante :

$$ax^n + bx^n = (a+b)x^n$$

Quand on a réduit un polynôme, l'expression obtenue est appelée **forme réduite** du polynôme. Si cette forme est $x \mapsto 0$, on dit que le polynôme est le **polynôme nul**.

Théorème 1. *La forme réduite d'un polynôme est unique à l'ordre près des monômes qui le constituent.*

Définition 2. *Le degré d'un polynôme* ***non nul*** *est le degré du monôme de plus haut degré figurant dans son écriture réduite.*

Définition 3. *Le terme constant d'un polynôme est le coefficient (éventuellement nul) de son monôme de degré 0.*

Corollaire 4 (identification)**.** *Soient f et g deux polynômes non nuls donnés sous leur forme réduite. Alors $f = g$ si et seulement si f et g ont même degré et si leurs monômes constituants de même degré ont deux à deux leurs coefficients égaux.*

Proposition 5. *Soient f et g deux polynômes non nuls. On a :*

$$\deg(f \times g) = \deg f + \deg g$$

Définition 6. *Factoriser un polynôme de degré $n \geq 2$ c'est l'écrire comme un produit de polynômes de degrés tous $< n$.*

Cherchons par exemple, si on peut factoriser :

$$f : x \mapsto 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 2 \qquad \text{par} \qquad g : x \mapsto x^2 + x + 1$$

L'examen des degrés conduit à chercher un facteur h de degré 2, et donc de la forme $h(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des constantes à déterminer. On veut donc :

$$g(x) \times h(x) = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$$

Dans le produit, le terme de plus haut degré est $2x^4$, donc $a = 2$. Le terme constant est 2, donc $c = 2$. On en déduit que $h(x) = 2x^2 + bx + 2$. On développe :

$$g(x) \times h(x) = (x^2 + x + 1)(2x^2 + bx + 2) = 2x^4 + x^3(b + 2) + x^2(2 + b + 2) + x(2 + b) + 2$$

On doit donc avoir pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^4 + x^3(b + 2) + x^2(2 + b + 2) + x(2 + b) + 2 = 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$$

L'**identification** conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b + 2 & = & -1 \\ 4 + b & = & 1 \end{array} \right.$$

qui est équivalent à $b = -3$. D'où l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 2 = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 3x + 2)$$

Définition 7. *On dit qu'un réel α est **racine** d'un polynôme f si $f(\alpha) = 0$.*

2.2 Polynôme du second degré

Dans ce paragraphe, on considère f, trinôme du second degré en x, défini par :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des constantes, et $a \neq 0$ (*voir* rappels p. 16). Le **discriminant** de f est :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Proposition 8. *Si $\Delta > 0$ on sait que f admet deux racines distinctes. La somme S et le produit P de ces deux racines valent :*

$$S = \frac{-b}{a} \qquad\qquad P = \frac{c}{a}$$

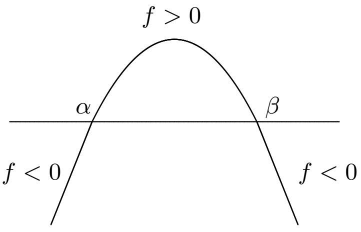
Démonstration : on a pour tout x réel :

$$\begin{array}{rcl} ax^2 + bx + c & = & a(x - x_1)(x - x_2) \\ & = & ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a(x_1 x_2) \\ & = & ax^2 - aSx + aP \end{array}$$

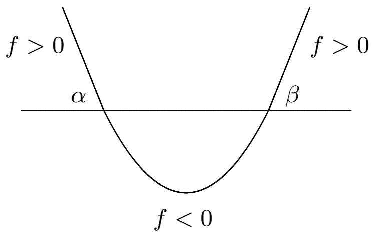
La conclusion résulte de l'identification (cor. 4, p. 45).

Théorème 9 (signe du trinôme)**.**
1/ Si $\Delta \leq 0$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de a.

2/ Si $\Delta > 0$ notons α et β les deux racines de f, ordonnées telles que $\alpha < \beta$. Alors :
- *$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de $-a$ si $\alpha < x < \beta$ (**entre** les racines)*
- *$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de a si $x < \alpha$ ou $x > \beta$ (**à l'extérieur** des racines)*



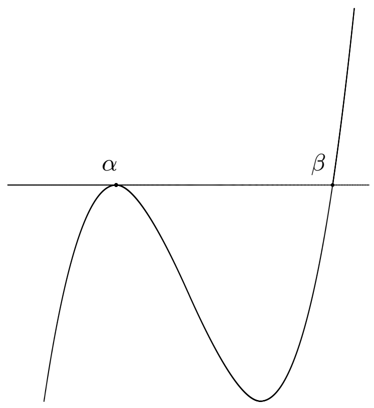
cas : $a < 0$



cas : $a > 0$

2.3 Factorisation

Définition 10 (racines simples, doubles)**.** *Soit f un polynôme et α un réel. Si f peut se factoriser par $(x-\alpha)$ mais pas par $(x-\alpha)^2$, on dit que α est une* ***racine simple*** *de f. Si f peut se factoriser par $(x-\alpha)^2$ mais pas par $(x-\alpha)^3$, on dit que α est une* ***racine double*** *de f.*



Voici un exemple : soient α et β des réels tels que $\alpha < \beta$. Soit le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$$

α est racine double, β est racine simple.

Théorème 11 (factorisation par $x-\alpha$)**.** *Soit f un polynôme et α un réel. On a :*

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \text{il existe un polynôme } g \text{ tel que } \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-\alpha)g(x)$$

Démonstration : le sens $\Leftarrow$ est évident. La réciproque est subtile. Commençons par le cas particulier où $\alpha = 0$. Remarquons d'abord que pour tout polynôme f, le réel $f(0)$ est le terme constant de f, car pour tout entier $n \geq 1$, on a $0^n = 0$. Si donc $f(0) = 0$ c'est que le terme constant de f est nul, et alors f se factorise par x, ce qui prouve le cas particulier de la réciproque. Dans le cas général, si $f(\alpha) = 0$, considérons le polynôme

$$F : x \mapsto f(x+\alpha)$$

On a $F(0) = 0$ donc F se factorise par x, d'après le cas particulier déjà traité. Donc il existe un polynôme G, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = xG(x) \tag{1}$$

Comme pour tout réel x, on a $f(x) = F(x-\alpha)$, l'équation (1) implique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-\alpha)G(x-\alpha)$$

Or $x \mapsto G(x-\alpha)$ est un polynôme. La preuve est donc achevée.

Corollaire 12. *Un polynôme de degré $n \geq 1$ possède au plus n racines réelles, non nécessairement distinctes.*

L'**idée de la démonstration** est la suivante. Notons f un polynôme de degré n. Si f n'a pas de racine réelle alors l'énoncé est vrai pour lui. Si f admet au moins une racine $\alpha \in \mathbb{R}$, par le théorème de factorisation, il se factorise par $(x-\alpha)$ et un facteur g de degré $n-1$. Appliquant à g le même raisonnement, de proche en proche, on aboutit pour f à n facteurs au plus, du type $x-\alpha$, donc à n racines réelles au plus.

2.4 Exercices

Exercice 1.

Soit le polynôme f défini par la formule $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$.

1. Calculer ses racines. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 2 (résolu)**.**

Soit le polynôme f défini par la formule : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 18x - 8$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

Solution : 1. Une racine évidente de f est -1. Par le th. 11, p. 47, on sait qu'alors f se factorise par $x+1$. Par identification, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(3x^3 + x^2 - 10x - 8)$$

On voit que le second facteur admet encore -1 comme racine évidente. Par identification, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3x^3 + x^2 - 10x - 8 = (x+1)(3x^2 - 2x - 8)$$

Le facteur du second degré s'annulant en 2, on peut le factoriser par $x-2$. Finalement, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^2(x-2)(3x+4)$$

2. L'inéquation $f(x) < 0$ est donc équivalente à :

$$(x-2)(3x+4) < 0 \quad \text{et} \quad x+1 \neq 0$$

Le théorème sur le signe du trinôme (th. 9, p. 46) permet donc de conclure :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{4}{3}; 2\right[\setminus \{-1\}$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) < 0$ peut donc s'écrire :

$$\mathscr{S} = \left]-\frac{4}{3}; -1\right[\cup \left]-1; 2\right[$$

Exercice 3.

Soient les polynômes f et g définies par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 15 \qquad\qquad g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1230$$

1. Factoriser f le plus possible.

2. Déterminer toutes les racines de f.
3. Vérifier que $g(10) = 0$. En déduire la factorisation de g.
4. Déterminer toutes les racines de g.

Exercice 4 (*identification*).

Soient a, b, c, d des réels et soit f le polynôme défini par :

$$x \mapsto x^5 + ax + b$$

1. Développer, réduire et ordonner le produit suivant :

$$(x^2 - 4x + 1) \times (x^3 + cx^2 + dx + b)$$

2. Déterminer les réels a et b de sorte que f soit factorisable par $x^2 - 4x + 1$.

Exercice 5 (*factorisation et signe*).

Soit le polynôme f défini par la formule : $f(x) = x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 2x$.

1. Factoriser f le plus possible en utilisant des racines évidentes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 6.

Soient a, b et c des réels, on suppose $a \neq 0$. On considère le polynôme f défini par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1. Démontrer l'implication suivante

$$a \text{ et } c \text{ sont de signes contraires } \Rightarrow f \text{ admet deux racines réelles}$$

2. Donner un exemple, montrant que la réciproque est fausse.

Exercice 7.

1. Factoriser le plus possible l'expression :

$$f(x, y) = y^3 - x^3 + x^2y - xy^2 + x - y$$

   On pourra utiliser l'identité :

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2)$$

2. En déduire que, dans un repère orthonormé du plan, l'ensemble des points $M(x, y)$ qui vérifient :

$$f(x, y) = 0$$

   est la réunion d'une droite et d'un cercle (*voir* § 9.1, p. 171).

Exercice 8.

Soit a un réel. On dit qu'un polynôme admet a pour **racine au moins double**, s'il est factorisable par $(x - a)^2$.

1. Soit a un réel. Déterminer les réels p et q, tels que le polynôme f défini par :

$$f(x) = x^3 + px + q$$

   ait une racine au moins double.

2. En déduire que pour que f ait une racine au moins double, il faut que soit nul le nombre Δ défini par :

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

3. Pour montrer que la réciproque est vraie, on procède ainsi. Supposons que $\Delta = 0$.
a/ Si $p = 0$ alors $f(x) = x^3$. Donc f admet 0 pour racine triple.
b/ Si $p \neq 0$, montrer que le réel :

$$-\frac{3}{2}\frac{q}{p}$$

est racine double de f.

2.5 Correction des exercices

Ex. 1, p. 48 1. On calcule le discriminant du trinôme $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 4 + 96 = 100$$

Puisque $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 10}{6} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 10}{6} = \frac{4}{3}$$

Le théorème donnant le signe du trinôme (th. 9, p. 46) dit que le signe de f est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On en déduit :

$$f(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in]-2; \frac{4}{3}[$$

Ex. 3, p. 48 1. On regroupe et on factorise :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = x^2(x+3) - 5(x+3) = (x^2 - 5)(x+3)$$

2. On a alors, par la règle d'annulation (prop.. 6, p. 16) :

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0) \;\Leftrightarrow\; (x = -\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = -3)$$

3. On a :

$$g(10) = 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 - 1230 = 1000 + 200 + 30 - 1230 = 1230 - 1230 = 0$$

Puisque g s'annule en 10, on sait, par le th. 11, p. 47, qu'il se factorise par $x - 10$. On a d'abord :

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1230 = (x - 10)(x^2 + ax + 123)$$

en identifiant, dans g et dans le produit, les termes de plus haut degré d'une part, et les termes constants d'autre part. Ensuite, on calcule a par identification, et on trouve :

$$g(x) = (x - 10)(x^2 + 12x + 123)$$

Pour continuer la factorisation, on calcule le discriminant du trinôme $x^2+12x+123$. On trouve :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 123 < 0$$

Puisque $\Delta < 0$, on sait, par le cor. 10, p. 17, que le trinôme ne peut pas se factoriser sur $\mathbb{R}$ donc, la factorisation de g par $x-10$ ne peut pas être complétée.

4. Puisque $\Delta < 0$, on sait, par le cor. 9, p. 16, que le trinôme $x^2+12x+123$ n'a pas de racines réelles. On a donc :

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-10)(x^2+12x+123) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$$

Ex. 4, p. 49 1. On développe et on réduit :

$$\begin{aligned}
&(x^2-4x+1)\times(x^3+cx^2+dx+b)\\
&\quad = x^5+cx^4+dx^3+bx^2 \quad -4x^4-4cx^3-4dx^2-4bx \quad +x^3+cx^2+dx+b\\
&\qquad = x^5+x^4(c-4)+x^3(d-4c+1)+x^2(b-4d+c)+x(-4b+d)+b
\end{aligned}$$

2. On identifie par le cor. 4, p. 45, et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} c-4 & = & 0 \\ d-4c+1 & = & 0 \\ b-4d+c & = & 0 \\ -4b+d & = & a \end{cases}$$

On déduit de la première équation $c = 4$. Valeur que l'on porte dans les trois autres équations. Il vient ensuite :

$$d = 15 \qquad b = 56 \qquad a = 209$$

Conclusion, on a montré que pour que f soit factorisable par x^2-4x+1, il faut et il suffit que $a = 209$ et $b = 56$, et on a :

$$x^5+209x+56 = (x^2-4x+1)\times(x^3+4x^2+15x+56)$$

Ex. 5, p. 49 1. On a d'abord :

$$f(x) = x^5-2x^3-3x^2-2x = x(x^4-2x^2-3x-2) = xg(x)$$

où on a posé $g(x) = x^4-2x^2-3x-2$. On remarque ensuite que $g(-1) = 0$, donc, par le th. 11, p. 47, on sait que g se factorise par $x+1$. En identifiant, on trouve :

$$g(x) = (x+1)(x^3-x^2-x-2) = (x+1)h(x)$$

où on a posé $h(x) = x^3-x^2-x-2$. On remarque ensuite que $h(2) = 0$, donc h se factorise par $x-2$. En identifiant, on trouve :

$$h(x) = (x-2)(x^2+x+1)$$

La factorisation s'achève là car, x^2+x+1 a un discriminant < 0. Donc, il ne peut pas se factoriser sur $\mathbb{R}$. De plus, il n'a pas de racines réelles, et il est partout > 0. Finalement, on a la factorisation :

$$f(x) = x^5-2x^3-3x^2-2x = x(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$$

2. Puisque $x^2+x+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de f est celui du produit $x(x+1)(x-2)$. On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$(x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en conclut :

$$f(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \,]-\infty; -1[\, \cup \,]0; 2[$$

Ex. 6, p. 49 1. On a :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

si a et c sont de signes contraires, alors $ac < 0$ donc $-4ac > 0$, donc $\Delta > 0$. On en déduit que f admet deux racines réelles distinctes.
2. Mais f peut avoir deux racines réelles distinctes, sans que a et c soient de signes contraires. Par exemple le polynôme f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

admet deux racines distinctes, alors que a et c sont > 0.

Ex. 7, p. 49 1. On factorise :

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y^3 - x^3 \;+\; x^2y - xy^2 \;+\; x - y \\
&= (y-x)(y^2 + xy + x^2) \;+\; xy(x-y) \;+\; x - y \\
&= (y-x)(y^2 + \cancel{xy} + x^2 - \cancel{xy} - 1) \\
&= (y-x)(y^2 + x^2 - 1)
\end{aligned}$$

2. On en déduit :

$$f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; (y-x)(y^2+x^2-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (y - x = 0) \;\text{ ou }\; (y^2 + x^2 - 1 = 0)$$

Or :

$$y - x = 0 \;\Leftrightarrow\; y = x$$

On reconnaît l'équation d'une droite. Tandis que :

$$y^2 + x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 1$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $(0,0)$, et de rayon $r = 1$. Donc, l'ensemble des points $M(x,y)$ qui vérifient :

$$f(x,y) = 0$$

est la réunion d'une droite et d'un cercle.

Ex. 8, p. 49 1. Le polynôme f défini par :

$$f(x) = x^3 + px + q$$

admet a pour racine au moins double, si et seulement il existe $b \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x^3 + px + q &= (x-a)^2(x+b) \\
&= (x^2 - 2ax + a^2(x+b) \\
&= x^3 + x^2(b - 2a) + x(-2ab + a^2) + a^2b
\end{aligned}$$