



EN
CARTES
MENTALES

1^{re}

SPÉCIALITÉ

MATHS

EN CARTES MENTALES

- ❖ L'essentiel du cours
- ❖ 14 cartes mentales
- ❖ 120 exercices corrigés

ellipses

► L'essentiel du cours

Avant de commencer ce chapitre il sera nécessaire de revoir les identités remarquables vues en seconde.

Pour tous réels a et b différents de 0, on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

1 Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 (ou fonction trinôme du second degré) toute fonction f définie sur \mathbb{R} par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a , b et c sont des réels donnés et $a \neq 0$.

EXEMPLES. $f(x) = 5x^2 + 3$ est une fonction polynôme de degré 2, avec $a = 5$, $b = 0$ et $c = 3$.

$h(x) = (3x - 1)(6x + 4)$ est également une fonction polynôme de degré 2 car en développant l'expression on obtient $h(x) = 18x^2 + 6x - 4$.

2 Forme canonique

PROPRIÉTÉ

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres réels.}$$

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de f .

$$\alpha = -\frac{b}{2a}; \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Remarque : il est souvent plus simple de démontrer le résultat de la forme canonique que de connaître par cœur le résultat de α et β .

(Voir exemple résolu).

3 Variations

▶ Extremum

PROPRIÉTÉ

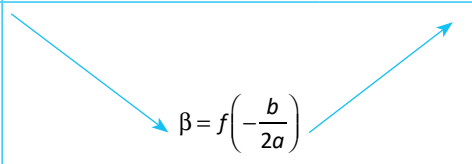
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

f admet un extremum en $x = \alpha$. Cet extremum est égal à β .

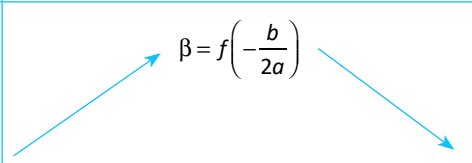
- Si $a > 0$, f admet un **minimum**.
- Si $a < 0$, f admet un **maximum**.

▶ Tableau de variations

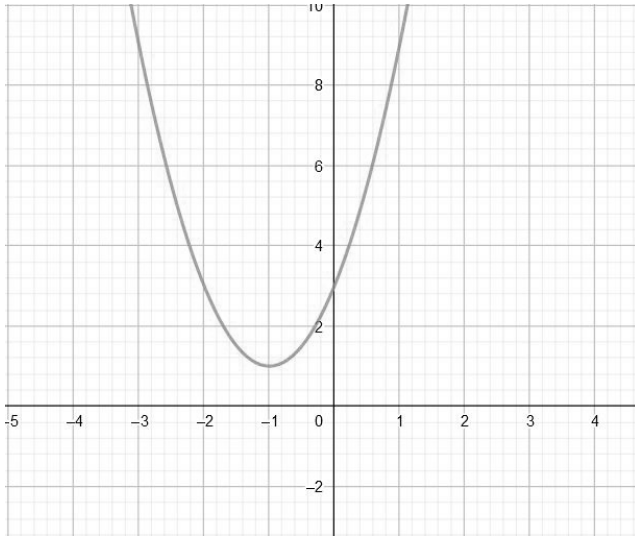
Si $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			

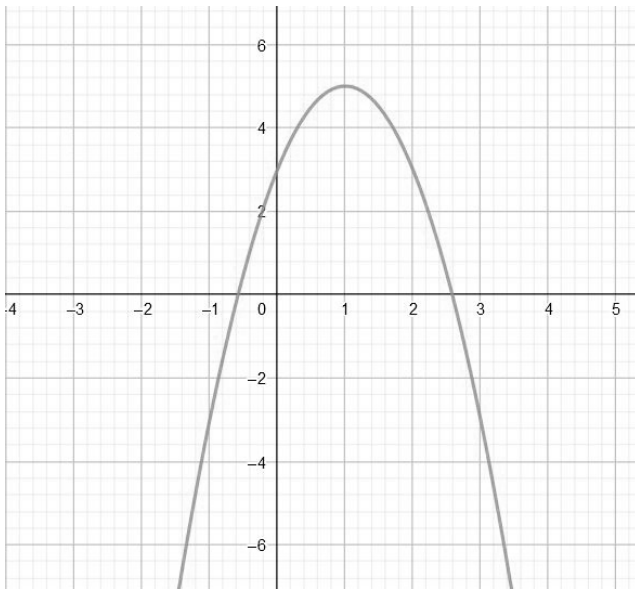
Si $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			

4 Représentation graphique



Allure de la courbe si $a > 0$



Allure de la courbe si $a < 0$

Remarque : la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole qui admet comme axe de symétrie la droite d'équation :

$$x = \alpha = -\frac{b}{2a}$$

Le sommet de la parabole S a pour coordonnées $S(\alpha, \beta)$.



► CARTE MENTALE 1. Fonctions du second degré

► S'entraîner à l'aide d'un exemple

$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ est une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} .

- 1 Déterminer par le calcul la forme canonique de la fonction $f(x)$.
- 2 En déduire les coordonnées du sommet de la parabole.
- 3 Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
- 4 Tracer la représentation graphique de la fonction de f sur l'intervalle $[-4 ; 5]$.

RÉPONSE

1 $f(x) = 3(x^2 - 2x) + 5$

On factorise par a (ici 3) la première partie de l'expression.

$$f(x) = 3(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 5$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable, pour la faire apparaître en entier, on ajoute le terme manquant et on le retire pour garder l'égalité.

$$f(x) = 3[(x - 1)^2 - 1] + 5$$

On note l'identité remarquable sous forme factorisée.

$$f(x) = 3(x - 1)^2 - 3 \times 1 + 5$$

$$f(x) = 3(x - 1)^2 + 2 \text{ **Forme canonique**}$$

Remarque : si le choix de la méthode n'est pas précisé dans l'énoncé, on peut aussi utiliser les formules de α et β données dans le 3.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 3} = 1$$

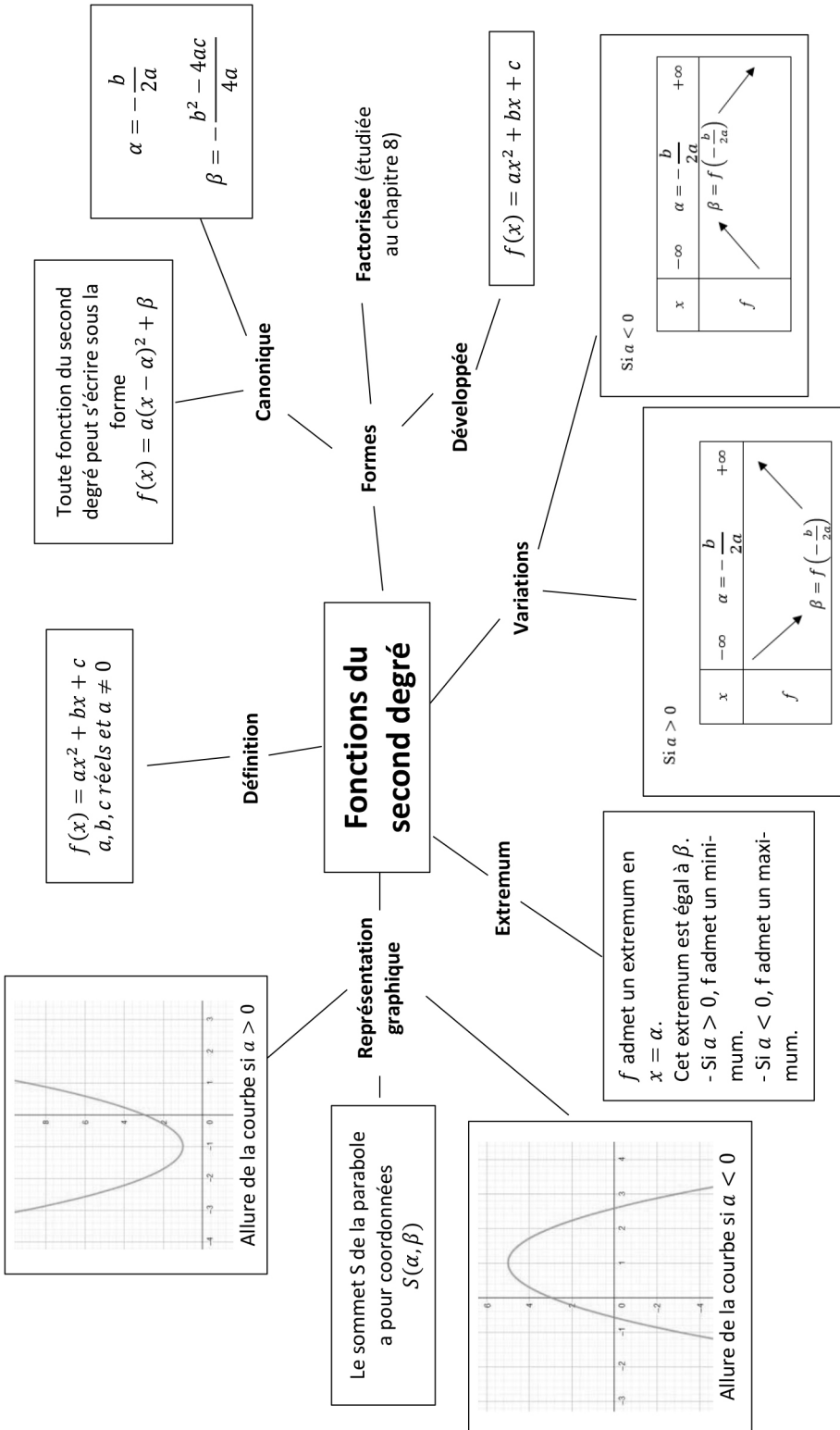
$$\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4 \times 3 \times 5}{4 \times 3} = 2$$

- 2 La parabole représentant la fonction f a comme sommet $S(1 ; 2)$.

3 $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$a = 3 > 0$ donc la fonction f admet un minimum, elle est d'abord décroissante puis croissante.

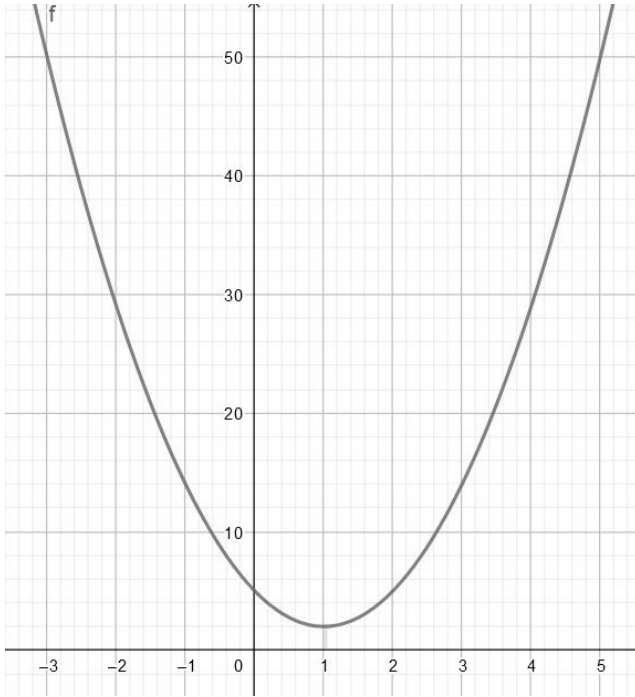
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f			



4 Pour tracer la représentation graphique, on remplit un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	50	29	14	5	2	5	14	29	50

Il faudra être attentif au choix de la graduation des axes en fonction des valeurs du tableau.



Représentation graphique de f sur l'intervalle $[-3 ; 5]$.

► Les exercices pour préparer son contrôle

Exercice 1.1.

Révisions de seconde

1 Développer en utilisant les identités remarquables.

a. $(x + 2)^2$

b. $\left(5x - \frac{7}{3}\right)^2$

c. $(2x - 4)(2x + 4)$

2 Factoriser en utilisant les identités remarquables.

a. $16x^2 - 24x + 9$

b. $x^2 + 3x + 2,25$

c. $9x^2 - 16$

3 Compléter à l'aide des identités remarquables.

a. $9x^2 + 42x + \dots = (3x - \dots)^2$

b. $x^2 - \dots x + 4 = (\dots x - \dots)^2$

 Corrigé page 143.

Exercice 1.2.

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$$

1 Déterminer la forme canonique de la fonction f par le calcul, vérifiez avec les formules du cours.

2 En déduire les coordonnées du sommet de la parabole.

3 Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

4 Déterminer l'équation de la droite axe de symétrie de la parabole.

 Corrigé page 143.

Exercice 1.3.

Mêmes questions avec la fonction $g(x) = 3x^2 + 5x + 7$ définie sur \mathbb{R} .

 Corrigé page 144.

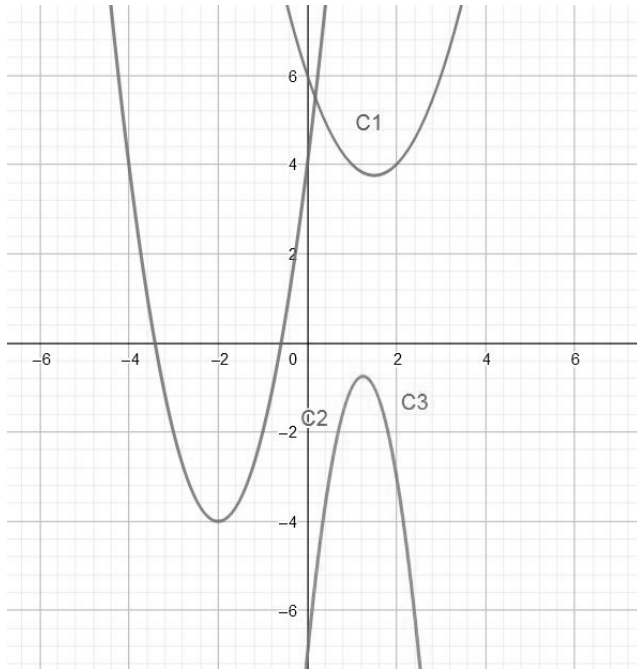
Exercice 1.4.

Associer chaque représentation graphique à sa fonction.

$$f(x) = x^2 - 3x + 6$$

$$g(x) = -4x^2 + 10x - 7$$

$$h(x) = 2x^2 + 8x - 3$$



[Corrigé page 145.](#)

Exercice 1.5.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2(x - 5)^2 + 16$.

- 1 Déterminer la valeur de l'extremum de la fonction f .
- 2 Est-ce un maximum ou un minimum, pour quelle valeur de x est-il atteint ?

[Corrigé page 145.](#)

Exercice 1.6.

Un cordonnier produit des pochettes en cuir.

Il peut produire au maximum 50 pochettes par mois.

Le coût de production en euros dépend du nombre de pochettes réalisées.

Ce coût peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 50]$ par

$$C(x) = x^2 + 4x + 243$$

Une pochette est vendue 40 euros.

- 1 Calculer la recette obtenue par le cordonnier pour la vente de 30 pochettes.
- 2 Exprimer en fonction de x la recette $R(x)$ obtenue pour la vente de x pochettes.
- 3 Exprimer en fonction de x le bénéfice $B(x)$ obtenu pour la vente de x pochettes.