EN CARTES MENTALES

T^le^

SPÉCIALITÉ

MATHS

EN CARTES MENTALES

- L'essentiel du cours
- 19 cartes mentales
- 260 exercices corrigés

ellipses

2
CHAPITRE

Probabilités conditionnelles

L'essentiel du cours

Les probabilités conditionnelles ont été vues en première. Dans tout ce chapitre, Ω désigne l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω.

1 Définitions

DÉFINITION 2.1.

Soit A et B deux événements de Ω, tels que $P(A) \neq 0$. La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

À savoir

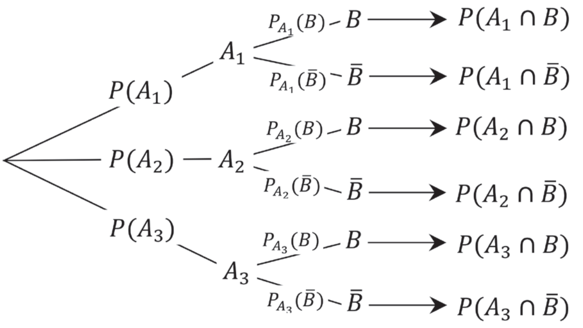
Dans le cadre équiprobable, on peut calculer la probabilité d'un événement par exemple avec la formule : $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

- La formule précédente peut s'écrire : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$,
- Si de plus $P(B) \neq 0$, on a aussi : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

DÉFINITION 2.2.

L'utilisation d'un arbre pondéré permet de modéliser une situation de probabilité conditionnelle. Pour le construire, il suffit de respecter quelques règles :

- Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.
- Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles correspondantes.
- Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- Règle 4 : Le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.



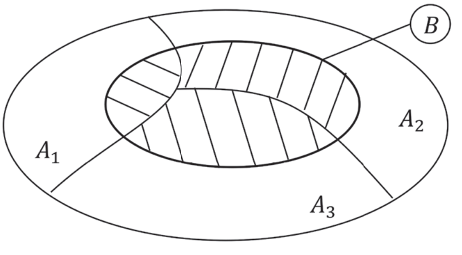
2 Formule des probabilités totales

PROPRIÉTÉ 2.3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Si l'univers Ω d'une expérience aléatoire est la réunion d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ deux à deux incompatibles et tels que pour tout i de 1 à n, $P(A_i) \neq 0$, alors pour tout événement B, on a :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$
$= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$



À savoir

- Dans ces conditions, on dit que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une partition de l'univers Ω.
- Une partition très usuelle est $\{A ; \bar{A}\}$, d'où $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.
- Cette formule permet de calculer la probabilité de l'événement B en connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

3 Indépendance

DÉFINITION 2.4.

On dit que les événements A et B sont indépendants si $P_A(B) = P(B)$
ou si $P_B(A) = P(A)$.

> **À savoir**
> L'indépendance traduit le fait que la réalisation (ou non) de l'un des deux événements n'influence pas la réalisation de l'autre.

PROPRIÉTÉ 2.5.

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

> **À savoir**
> - Savoir retrouver la démonstration de cette propriété.
> - Attention, cette formule n'est vraie que dans le cas de l'indépendance.

Carte mentale 2. Probabilités conditionnelles

S'entraîner à l'aide d'un exemple

Sujet du BAC S, exercice 1, partie A, Pondichéry, avril 2017.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98 ;
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'événement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;

C l'événement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

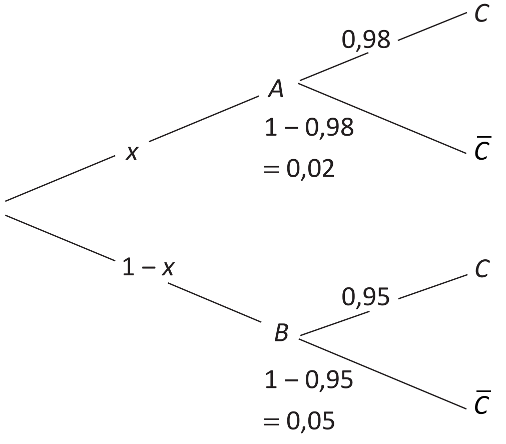
1 Représenter la situation par un arbre pondéré.

2 Montrer que $P(C) = 0{,}03x + 0{,}95$.

3 À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

RÉPONSE

1



2 Toutes les tablettes sont fabriquées soit par la chaîne A soit par la chaîne B et une tablette ne peut pas être fabriquée par les deux chaînes à la fois.
Donc $B = \overline{A}$.

A et $\overline{A}$ réalisent une partition de l'univers, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales. L'énoncé donne :

$$P_A(C) = 0{,}98 \text{ ; } P_{\overline{A}}(C) = 0{,}95 \text{ ; } P(A) = x \text{ et } P(\overline{A}) = 1 - x$$

Donc :

$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A) \times P_A(C) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(C)$

On a donc : $P(C) = x \times 0{,}98 + (1 - x) \times 0{,}95 = 0{,}03x + 0{,}95$.

3 $P(C) = 0{,}96 \Leftrightarrow 0{,}03x + 0{,}95 = 0{,}96 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{1}{3}$
et donc $P(B) = \dfrac{2}{3}$.

Probabilités conditionnelles

Définition

A et B sont deux événements, avec $P(A) \neq 0$
La probabilité de B sachant A est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriété

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

A et B indépendants

$$P_A(B) = P(B)$$

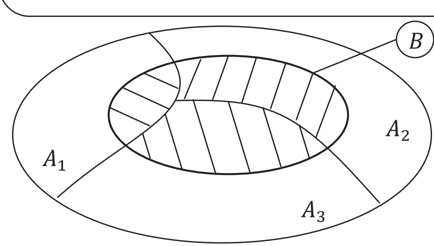
Propriété

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Formule des probabilités totales

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_3 \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_3) \times P_{A_3}(B)$$



A_1, A_2, A_3 est une partition de l'univers

Arbre pondéré

- $P(A_1)$ — A_1
  - $P_{A_1}(B)$ — $B \longrightarrow P(A_1 \cap B)$
  - $P_{A_1}(\bar{B})$ — $\bar{B} \longrightarrow P(A_1 \cap \bar{B})$
- $P(A_2)$ — A_2
  - $P_{A_2}(B)$ — $B \longrightarrow P(A_2 \cap B)$
  - $P_{A_2}(\bar{B})$ — $\bar{B} \longrightarrow P(A_2 \cap \bar{B})$
- $P(A_3)$ — A_3
  - $P_{A_3}(B)$ — $B \longrightarrow P(A_3 \cap B)$
  - $P_{A_3}(\bar{B})$ — $\bar{B} \longrightarrow P(A_3 \cap \bar{B})$

Règles

La SOMME des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Le PRODUIT des probabilités rencontrées le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection des évènements.

Cas particulier :
A et $\bar{A}$ est une partition de l'univers

Les exercices pour préparer son contrôle

Exercice 2.1.

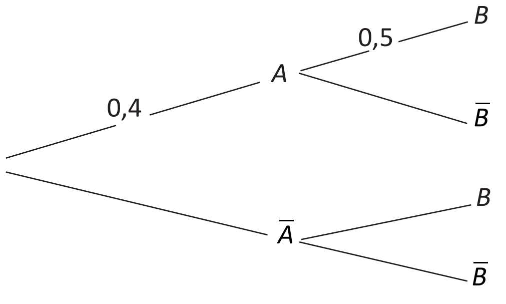
A et B désignent deux événements tels que :

$P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}6$.

Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

☛ *Corrigé page 199.*

Exercice 2.2.



1. Donner la signification des deux nombres 0,4 et 0,5.
2. On sait de plus que $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}3$.

Déterminer $P(\bar{A})$, $P_A(\bar{B})$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})$.

3. Calculer $P(A \cap B)$.
4. Calculer $P(B)$.
5. Calculer $P_{\bar{B}}(A)$.
6. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

☛ *Corrigé page 199.*

Exercice 2.3.

Sujet du BAC S, exercice 1, Amérique du Nord, juin 2016.

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;

B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;

V : « la bille est vendable ».

1 Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2 Justifier que $P(B \cap V) = 0{,}372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3 Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

Corrigé page 199.

Exercice 2.4.

Sujet du BAC S, Polynésie, juin 2016.

Un astronome responsable d'un club d'astronomie adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1 On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité pour que cet adhérent possède un télescope personnel est 0,494.

2 On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Corrigé page 200.

Exercice 2.5.

Sujet 1 de spécialité, exercice 1, partie 1, mars 2021.

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier »

A l'événement « le candidat a été admis à l'école »

$\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

☛ *Corrigé page 201.*

Exercice 2.6.

Sujet 2 de spécialité, exercice 1, partie 2, mars 2021.

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

V_1 : « la première boule tirée est verte » ;

B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;

V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;

B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

1. Calculer la probabilité de V_2 sachant que V_1, notée $P_{V_1}(V_2)$.
2. En déduire la probabilité de l'événement V_2.

☛ *Corrigé page 202.*