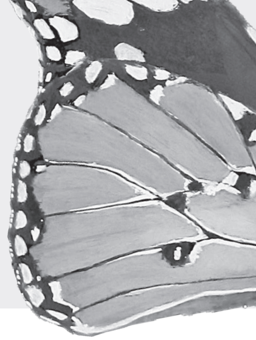
L'ESSENTIEL POUR PROGRESSER

Les mathématiques au lycée

spécialité

1re

ellipses



1 Polynômes du second degré

PARTIE 1 (aspect algébrique)

Cette partie est traitée en début d'année de première. Elle suffit pour traiter tous les exercices de ce chapitre.

Définition

Un **polynôme du second degré** *(ou trinôme du second degré, ou trinôme)* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression du type : $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

a est le coefficient d'ordre 2 du trinôme (on dit aussi coefficient dominant du trinôme).

b est le coefficient d'ordre 1 du trinôme.

c est le coefficient d'ordre 0 du trinôme.

Propriété

Tout polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\boxed{a(x-\alpha)^2 + \beta}$, où α et β sont des réels fixés.

Cette écriture est la **forme canonique du trinôme**.

On notera que $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et que β est l'image de α par le trinôme.

Réciproquement, toute fonction du type $a(x-\alpha)^2 + \beta$ (avec $a \neq 0$) est un polynôme du second degré.

Savoir faire

La forme canonique peut s'obtenir par la **méthode de complétion du carré**. On utilise alors l'identité $x^2 - 2\alpha x = (x-\alpha)^2 - \alpha^2$.

À retenir

La forme canonique est pratique pour déterminer l'extremum du trinôme, ou pour résoudre rapidement certaines équations ou inéquations.

Définition

Le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet pour **discriminant** le nombre réel $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Propriété

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme de discriminant Δ.

Si $\Delta < 0$, alors le trinôme **n'a pas de racine**, et son signe reste constant.

Si $\Delta = 0$, alors le trinôme **a une racine unique** *(dite « double »)* $\boxed{x_0 = \frac{-b}{2a}}$.

Si $\Delta > 0$, alors le trinôme **a exactement 2 racines** :

$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

Propriété

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme de discriminant Δ.

Si $\Delta < 0$, alors le trinôme **n'admet pas de forme factorisée** dans $\mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$, alors le trinôme de racine x_0 s'écrit sous **forme factorisée** $\boxed{a(x - x_0)^2}$.

Si $\Delta > 0$, alors le trinôme de racines x_1 et x_2 s'écrit sous **forme factorisée** $\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$.

Toute fonction du type $a(x - x_1)(x - x_2)$ (où $a \neq 0$, et où x_1 et x_2 sont 2 réels éventuellement confondus) est un polynôme du second degré.

> ***À retenir***
> La forme factorisée est pratique pour résoudre certaines équations ou inéquations, ou pour étudier le signe du trinôme.

Propriété

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme admettant 2 racines éventuellement confondues.

Soit p le **produit** de ces racines, et s leur **somme**.

On a alors : $\boxed{p = \frac{c}{a}}$ et $\boxed{s = \frac{-b}{a}}$.

PARTIE 2 (aspect analytique et géométrique)

Cette partie est traitée après les chapitres sur la dérivation et la géométrie repérée. C'est pourquoi les corrigés des exercices sont rédigés sans nécessairement en utiliser les propriétés.

Propriété

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Sa forme canonique $\boxed{a(x - \alpha)^2 + \beta}$ est telle que $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = p(\alpha)$.

Si $a > 0$, alors p admet le **tableau de variations** suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$p(x)$		$\searrow$	$p(\alpha)$	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors p admet le **tableau de variations** suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$p(x)$		$\nearrow$	$p(\alpha)$	$\searrow$	

Propriété

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Si p n'a pas de racines, alors il reste du **signe de a sur $\mathbb{R}$**.

Si p a une racine double x_0, alors il est nul en x_0, et il est du **signe de a ailleurs**.

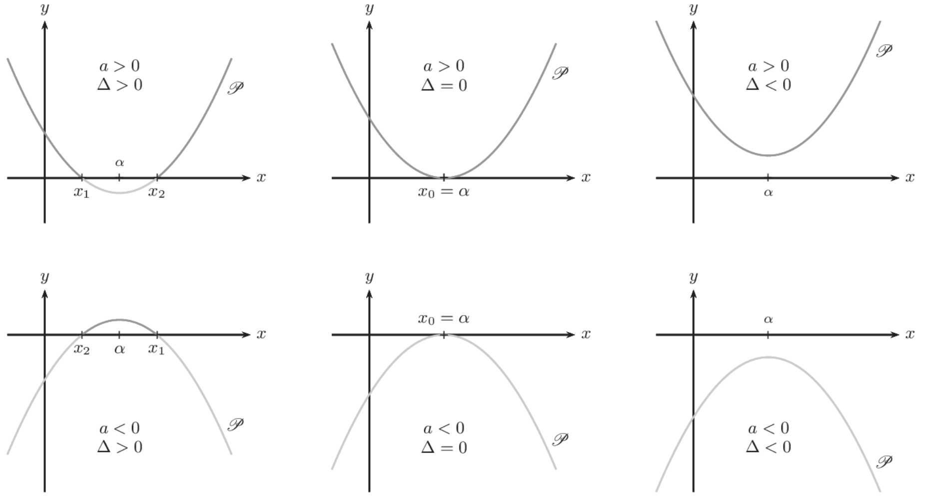
Si p a deux racines distinctes x_1 et x_2, alors il est nul en x_1 et en x_2, il est du **signe de a à l'extérieur de ses racines**, et il est du **signe opposé à celui de a entre ses racines**.

Propriété

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est une **parabole** dont le sommet a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = p(\alpha)$.

Cette parabole admet l'axe d'équation $x = \alpha$ pour axe de symétrie.



> Le dessin précédent est une synthèse graphique donnant les différentes positions de la parabole représentant un polynôme du second degré.
> Le sens de variation, les racines éventuelles et le signe sont alors évidents.

Exercices corrigés

Exercice 1

***À savoir !** Les méthodes pour résoudre une équation.*

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -6x^2 - x + 1$.

a. Quelle est la nature de f ?

b. Montrer que f admet pour forme canonique $-6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 + \frac{25}{24}$.

c. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{25}{24}$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 14x + 49$.

a. Quelle est la nature de f ?

b. Écrire $f(x)$ sous forme canonique.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 10x + 3$.

a. Quelle est la nature de f ?

b. Écrire $f(x)$ sous forme canonique.

c. En déduire l'extremum de f et donner l'abscisse pour laquelle il est atteint.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

a. Quelle est la nature de f ?

b. Montrer que f admet pour forme canonique $2(x-1)^2 + 3$.

c. Résoudre l'équation (E) : $2x^2 = 4x + 16$ sans utiliser de discriminant.

Corrigé

Un trinôme du second degré s'écrit sous forme développée réduite $ax^2 + bx + c$ *avec* $a \neq 0$.

1. a. $f(x) = -6x^2 - x + 1$.

f est un trinôme du second degré avec $a = -6$, $b = -1$ et $c = 1$.

b. *Pour écrire un trinôme* $ax^2 + bx + c$ *sous forme canonique, il suffit de le présenter sous la forme* $a(x-\alpha)^2 + \beta$

Première méthode. La forme proposée est convenable, avec $\alpha = -\frac{1}{12}$ et $\beta = \frac{25}{24}$.

On veut donc montrer l'égalité $f(x)=-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}$.

Pour démontrer une égalité, on évite de partir de l'égalité à prouver (sauf si l'on sait parfaitement raisonner par équivalences).

Il suffit en général d'utiliser l'une des 3 méthodes suivantes :

1. *montrer que l'un des 2 membres est égal à l'autre*
2. *montrer que chacun des membres est égal à une même expression.*
3. *montrer que la différence des 2 membres vaut 0.*

Ici, on utilise la méthode 1.

On développe le second membre.

On obtient : $-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}=-6\left(x^2+2\times x\times\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}\right)^2\right)+\frac{25}{24}$

Soit : $-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}=-6\left(x^2+\frac{2}{12}\times x+\frac{1^2}{12^2}\right)+\frac{25}{24}$

Soit : $-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}=-6\times x^2-6\times\frac{2}{12}\times x-6\times\frac{1}{144}+\frac{25}{24}$

Soit : $-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}=-6x^2-\frac{12}{12}\times x-\frac{6}{144}+\frac{25}{24}$

Soit : $-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}=-6x^2-x-\frac{1}{24}+\frac{25}{24}$

Soit : $-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}=-6x^2-x+\frac{24}{24}=-6x^2-x+1$

Soit : $-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}=f(x)$.

Donc f admet bien pour **forme canonique** $-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}$.

Seconde méthode. Pour les experts en calcul, il est possible de trouver la forme canonique par la méthode de **complétion du carré** :

$f(x)=-6x^2-x+1=-6\left(x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)$

$f(x)=-6\left(x^2+2\times\frac{1}{12}x+\left(\frac{1}{12}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{6}\right)$

$f(x)=-6\left(\left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{144}-\frac{1}{6}\right)$

$f(x)=-6\left(\left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\frac{25}{144}\right)$

$f(x)=-6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{25}{24}$ (c'est l'écriture sous forme canonique prévue).

Une **troisième méthode** consiste à utiliser le fait que $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et que $\beta=f(\alpha)$.

Donc : $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{-12}=-\frac{1}{12}$.

Et : $\beta=f(\alpha)=f\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{150}{144}=\frac{25}{24}$.

D'où la **forme canonique** :

EXERCICES CORRIGÉS

$f(x) = -6\left(x - \left(-\frac{1}{12}\right)\right)^2 + \frac{25}{24} = -6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 + \frac{25}{24}$.

c. Résolvons l'équation $f(x) = \frac{25}{24}$

Comme $\frac{25}{24}$ *apparaît dans la forme canonique, on utilise cette écriture.*

$f(x) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow -6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 + \frac{25}{24} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow -6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

On obtient : $f(x) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow -6 = 0$ *(ce qui est impossible)* ou $\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = 0$

Le carré d'un nombre est nul si et seulement si ce nombre est nul.

On obtient : $f(x) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow x + \frac{1}{12} = 0$

Soit : $f(x) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{12}$

Donc $\mathrm{S} = \left\{-\frac{1}{12}\right\}$

2. a. $f(x) = x^2 - 14x + 49$.

f est un trinôme du second degré avec $a = 1$, $b = -14$ et $c = 49$.

b. *Un trinôme* $ax^2 + bx + c$ *admet pour forme canonique* $a(x - \alpha)^2 + \beta$

La forme canonique était ici évidente en utilisant l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

On obtient : $f(x) = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x - 7)^2$

On reconnaît une écriture canonique $1(x - 7)^2 + 0$.

Une **autre méthode** consiste à utiliser le fait que $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et que $\beta = f(\alpha)$.

On obtient : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{2} = 7$.

Et : $\beta = f(\alpha) = f(7) = 0$.

D'où la **forme canonique** : $f(x) = 1(x - 7)^2 + 0 = (x - 7)^2$.

On notera que la forme canonique est ici égale à la forme factorisée !

c. Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

On obtient : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 7)^2 = 0$

Le carré d'un nombre est nul si et seulement si ce nombre est nul.

On obtient : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 7 = 0$

Soit : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7$

Donc $\mathrm{S} = \{7\}$

3. a. $f(x) = x^2 - 10x + 3$.

f est un trinôme du second degré avec $a = 1$, $b = -10$ et $c = 3$.

b. *Un trinôme* $ax^2 + bx + c$ *admet pour forme canonique* $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Nous cherchons la forme canonique par la méthode de **complétion du carré**.
On obtient : $f(x) = x^2 - 10x + 3 = x^2 - 2 \times 5 \times x + 3$.
Soit : $f(x) = x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2 - 5^2 + 3 = (x-5)^2 - 25 + 3$.
Soit : $f(x) = (x-5)^2 - 22$.
On reconnaît une **écriture canonique** $1(x-5)^2 + (-22)$.
c. ***À retenir !*** *Le minimum d'une fonction, s'il existe, est la plus petite de ses images.*
Montrons que -22 est le minimum de f et qu'il est atteint pour $x = 5$.
Il suffit de montrer que, pour tout x, $f(x) \geq f(5)$.

On commence par calculer : $f(5) = (5-5)^2 - 22 = -22$.
Il suffit donc de montrer que : pour tout nombre réel x, $f(x) \geq -22$.
Or on a : $(x-5)^2 \geq 0$ (car le membre de gauche est un carré).
Et donc : $(x-5)^2 - 22 \geq 0 - 22$.
Et par là : pour tout nombre réel x, $f(x) \geq -22$.
Donc, finalement, m admet -22 comme **minimum**, et ce minimum est atteint pour $x = 5$.
On peut aussi savoir que, si $a > 0$, alors le trinôme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ admet pour minimum β, et ce minimum est atteint en α.
Cette propriété est dans la partie II du cours.

4. **a.** $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.
f est un trinôme du second degré avec $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$.
b. La forme proposée est bien une forme canonique (avec $\alpha = 1$ et $\beta = 3$).
On veut donc montrer l'égalité $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$.
On développe le second membre.
$2(x-1)^2 + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5 = f(x)$
Donc f admet bien pour **forme canonique** $2(x-1)^2 + 3$.
c. Résolvons l'équation (E) : $2x^2 = 4x + 16$.
On tente de faire apparaître le trinôme $f(x)$, en transposant $4x$ et en ajoutant 5 aux 2 membres.
(E) $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 5 = 16 + 5$
(E) $\Leftrightarrow f(x) = 21$
On utilise alors la forme canonique, qui permet de résoudre ce type d'équation en isolant le carré.
(E) $\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 3 = 21$
(E) $\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 18$

EXERCICES CORRIGÉS

(E) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 9$
(E) $\Leftrightarrow x-1=-3$ ou $x-1=3$
(E) $\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=4$
Donc $\mathrm{S}=\{-2;4\}$

Exercice 2

Résoudre chacune des équations suivantes :

1. $-x+1=6x^2$
2. $2x^2-14x=x^2-49$
3. $-5x^3+x^2-3x=0$
4. $x^3=9x$
5. $(x-1)(x^2+x+1)=0$
6. $\frac{x^2+7}{x^2-x-6}=0$

Corrigé

Pour résoudre une équation, repérer le domaine d'étude, puis rendre le membre de droite égal à 0. Si le membre de gauche est une fonction affine ou un trinôme, la résolution est facile. Sinon, on peut tenter de factoriser, ou de réduire au même dénominateur.

1. $\mathrm{D}_E=\mathbb{R}$
   $-x+1=6x^2 \Leftrightarrow -6x^2-x+1=0$.
   Le membre de gauche est un trinôme avec $a=-6$, $b=-1$ et $c=1$.
   $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-6)\times1=25$.
   $\Delta>0$. Le trinôme a 2 racines $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-5}{-12}=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+5}{-12}=-0,5$.
   Donc $\mathrm{S}=\left\{-0,5;\frac{1}{3}\right\}$.

2. $\mathrm{D}_E=\mathbb{R}$
   $2x^2-14x=x^2-49 \Leftrightarrow x^2-14x+49=0$.
   Le membre de gauche est un trinôme avec $a=1$, $b=-14$ et $c=49$.
   $\Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4\times1\times49=0$.
   $\Delta=0$. Le trinôme a 1 racine double $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{14}{2}=7$.