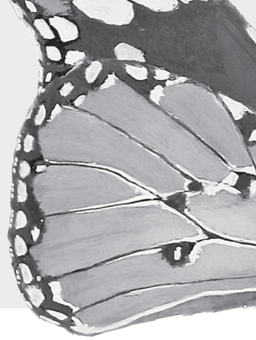
L'ESSENTIEL
POUR PROGRESSER

Les mathématiques au lycée

spécialité

Tle

ellipses



1
Les suites

Rappels de première

Une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison** a si et seulement si pour tout naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n + a}$

(ici, la suite est donnée par une formule de récurrence).

(u_n) est **arithmétique** de **raison** a si et seulement si pour tout naturel n, $\boxed{u_n = u_0 + na}$

(ici, la suite est donnée par une formule explicite).

Pour tout entier naturel n, on a : $\boxed{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** q si et seulement si pour tout naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$

(ici, la suite est donnée par une formule de récurrence).

(u_n) est **géométrique** de **raison** q si et seulement si pour tout naturel n, $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$

(ici, la suite est donnée par une formule explicite).

Pour tout réel q (avec $q \neq 1$),on a : $\boxed{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Savoir faire

Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q, on essaie en général de prouver la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times q$.

Mais, si cela semble difficile, on essaie alors de prouver la relation explicite $u_n = u_0 \times q^n$.

Quelle que soit la méthode, les relations doivent être vérifiées pour tout naturel n.

Il ne faut pas se contenter de faire quelques vérifications avec des valeurs de n particulières !

À retenir

Une variation régulière de a est associée à une suite arithmétique de raison a.

Une augmentation régulière de $t\,\%$ est associée à une suite géométrique de raison $1 + t\,\%$.

Une baisse régulière de $t\,\%$ est associée à une suite géométrique de raison $1 - t\,\%$.

I Limites infinies

Limite infinie

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $[A; +\infty[$ (où A est un réel) contient tous les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

La suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty; A]$ (où A est un réel) contient tous les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

Limites de référence

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Les plus curieux peuvent aussi apprendre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ (pour $k \in \mathbb{N}$ et $k > 0$)
et : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$

II Limites finies

Limite finie

La suite (u_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang.
On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l}$.
On dit que la suite **converge** vers l.

Propriétés

La limite d'une suite est **unique**.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe, alors on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}}$.

Suite stationnaire

Soit l un nombre réel; si $u_n = l$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Limites de référence

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Les plus curieux peuvent aussi apprendre que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ (pour $k \in \mathbb{N}$ et $k > 0$)

et : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$

Limite de (q^n)

Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = +\infty$.

Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 1$.

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 0$.

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Définition

La suite (u_n) **diverge** lorsqu'elle a une limite infinie ou lorsqu'elle n'a pas de limite.

III Opérations

Opérations

La détermination de la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de 2 suites est **intuitive**, et vérifie les tableaux ci-dessous.

Retenir essentiellement les **formes indéterminées** (notées FI), à traiter cas par cas :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l>0	l>0	l<0	l<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n < 0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Astuce
Dans une expression, toute constante peut être considérée comme une suite stationnaire, dont la limite est elle-même.

Savoir faire
En cas de forme indéterminée dans une recherche de limite, il est souvent opportun de factoriser le terme dominant (même si la factorisation est artificielle).

IV Raisonnement par récurrence

Axiome de récurrence

Soit P_n une propriété dépendant du naturel n et n_0 un naturel fixé.
Si l'on démontre que:

1. P_{n_0} est vraie (c'est l'**initialisation**)

2. pour tout naturel $n \geq n_0$,
si P_n est vraie, **alors** P_{n+1} est vraie (c'est l'**hérédité**)

alors, pour tout naturel $n \geq n_0$, la propriété P_n est vraie.

V Comparaisons

Théorème de comparaison

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et si, à partir d'un certain rang, $v_n \geq u_n$,
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Propriété

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si la suite (u_n) est croissante,
alors, pour tout entier naturel n, $u_n \leq l$.

Théorème des gendarmes

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$,
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Définitions

La suite (u_n) est **majorée** par M si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
M est un majorant de la suite (u_n).
La suite (u_n) est **minorée** par m si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
m est un minorant de la suite (u_n).
La suite (u_n) est **bornée** si et seulement si elle est majorée et minorée.

Théorèmes de convergence

Si (u_n) est **croissante** et **majorée**, alors (u_n) converge.
Si (u_n) est **décroissante** et **minorée**, alors (u_n) converge.

Théorèmes de divergence

Si (u_n) est **croissante** et **non majorée**, alors (u_n) diverge, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Si (u_n) est **décroissante** et **non minorée**, alors (u_n) diverge, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Propriété

Si (u_n) est **majorée** par M et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $l \leq M$.
Si (u_n) est **minorée** par m et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $l \geq m$.

Exercices corrigés

Exercice 1

Un exercice répétitif pour apprendre les opérations sur les limites de suites.

1. Soit (b_n) la suite définie par $b_n = -2n^3 + 8$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -4n^2 - \sqrt{n} + 11$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{9-\frac{2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}-1}$ pour tout naturel $n \geq 2$.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
4. Soit (r_n) la suite définie par $r_n = \dfrac{1-0{,}98^n}{1-n^2}$ pour tout naturel $n \geq 2$.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.
5. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = -n^3 + 3n^2 - 2n$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
6. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = \dfrac{n+9}{-n+7}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 8.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.
7. Soit (p_n) la suite définie par $p_n = \dfrac{8n^2-n+1}{n+2}$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Corrigé

Méthode : déterminer la limite de chacun des composants de la suite, puis en déduire la limite cherchée par application des résultats concernant limites et opérations.

1. On a : $b_n = -2n^3 + 8$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.
   Par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 = -2$ *(dans le cadre de la limite d'un produit, cette ligne sera souvent omise par la suite)*.
   Or $-2 < 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^3 = -\infty$ *(limite d'un produit)*.
   Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} 8 = 8$.
   On obtient donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ *(limite d'une somme)*.

2. On a : $u_n = -4n^2 - \sqrt{n} + 11$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$. Or $-4 < 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -4n^2 = -\infty$ *(limite d'un produit)*.

Par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$.

Enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} 11 = 11$.

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ *(limite d'une somme)*.

3. On a : $v_n = \dfrac{9 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Or $-\frac{2}{n} = (-2) \times \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{2}{n} = (-2) \times 0 = 0$.

Par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} 9 = 9$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 9 - \frac{2}{n} = 9 - 0 = 9$ *(limite d'une somme)*.

De même, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 = 0 - 1 = -1$ *(limite d'une somme)*.

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{9}{-1} = -9$ *(limite d'un quotient)*.

4. On a : $r_n = \frac{1 - 0,98^n}{1 - n^2}$.

$-1 < 0,98 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,98^n) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 0,98^n) = 1 - 0 = 1$.

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$.

Et par là : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - n^2 = -\infty$ *(limite d'une somme)*

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$ *(limite d'un quotient)*.

5. On a : $w_n = -n^3 + 3n^2 - 2n$.

On obtient facilement $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^3 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$, *ce qui conduit à une forme indéterminée.*

On factorise alors le terme « dominant » de la somme w_n.

$w_n = n^3\left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} = -1 + 0 - 0 = -1$.

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$ *(limite d'un produit)*.

6. On a : $t_n = \frac{n+9}{-n+7}$.

EXERCICES CORRIGÉS

On obtient facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} n+9=+\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+7=-\infty$*, ce qui conduit à une forme indéterminée.*

On factorise alors les termes « dominants » du quotient t_n *et on simplifie.*

$$t_n=\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(-1+\frac{7}{n}\right)}=\frac{1+\frac{9}{n}}{-1+\frac{7}{n}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{9}{n}=1+0=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\frac{7}{n}=-1+0=-1$.

Donc on obtient finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\frac{1}{-1}=-1$ *(limite d'un produit).*

7. On a : $p_n=\frac{8n^2-n+1}{n+2}$.

On obtient facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} 8n^2-n+1=+\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2=+\infty$*, ce qui conduit à une forme indéterminée.*

On factorise alors les termes « dominants » du quotient p_n *et on simplifie.*

$$p_n=\frac{8n^2-n+1}{n+2}=\frac{n^2\left(8-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=n\,\frac{8-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{8-0+0}{1+0}=8$.

Donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=+\infty$ *(limite d'un produit).*

Exercice 2

Un exercice de révision de notions vues en première…

Soit (w_n) la suite définie par $w_n=\frac{n}{n+2}$ pour tout naturel n.

Question 1. Montrons que (w_n) est strictement croissante de 3 façons différentes.

1. En déterminant le signe de $w_{n+1}-w_n$ pour tout entier naturel n.
2. En étudiant le quotient $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ pour tout entier naturel n (il est conseillé de montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n}=1+\frac{2}{n^2+3n}$).
3. En étudiant le sens de variation de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x}{x+2}$ pour x positif.

Question 2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Question 3. La phrase « si une suite est strictement croissante, alors sa limite est $+\infty$ » est-elle vraie ?